Algebraische Kurven und Flächen

Georg Grasegger

Matheseminar, 6. Februar 2015

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ | JKU

JKU Young Scientists MATHEMATIK

talente Stiftung

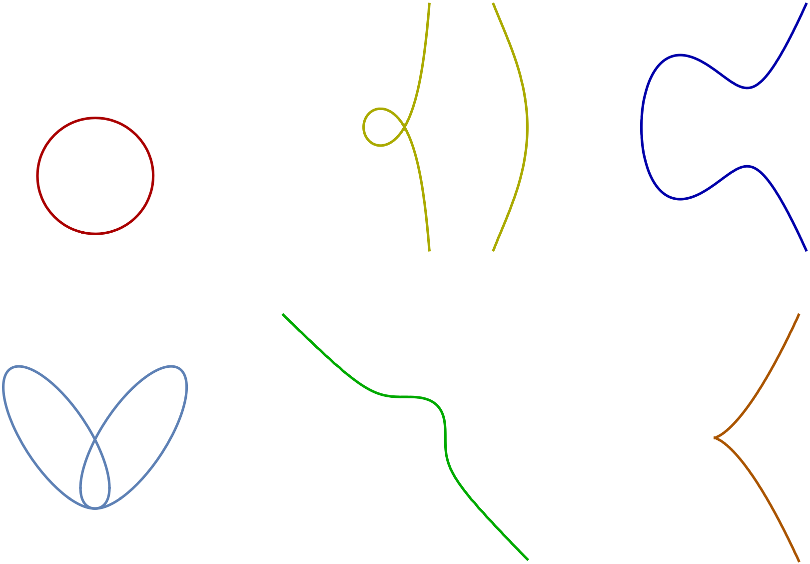
Inhalt

Definition

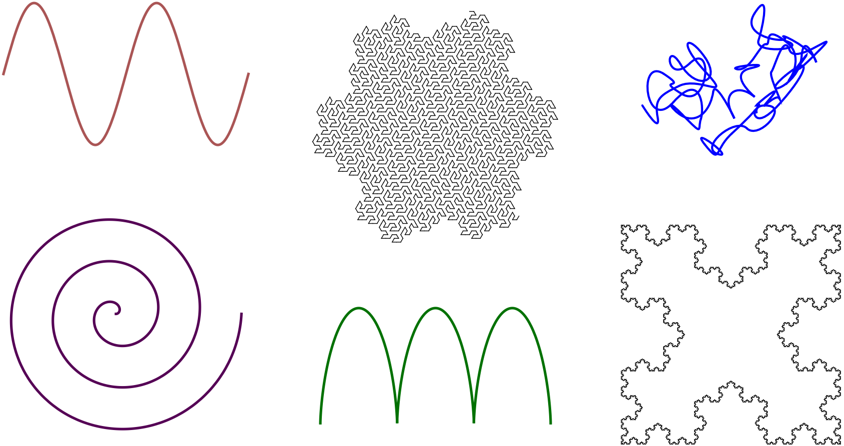
Definition

Eine ebene algebraische Kurve $\mathcal{C}$ ist die Lösungsmenge einer Gleichung $F(x, y) = 0$, wobei F ein Polynom in x und y ist. Wir schreiben $\mathcal{C} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid F(a, b) = 0\}$.

Beispiele



Gegenbeispiele



Aufgabe

Zeichnen Sie die folgende Kurve

- $F(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$

Mehrfache Punkte

Definition

Sei $\mathcal{C}$ eine Kurve (definiert durch $F(x,y)=0$) und $P=(a,b)$ ein Punkt.

- *P ist ein einfacher Punkt der Kurve, wenn er auf $\mathcal{C}$ liegt, also $F(a,b)=0$.*
- *P ist ein zweifacher Punkt der Kurve, wenn er zusätzlich $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0$ erfüllt.*
- *P ist ein $(n+1)$-facher Punkt der Kurve, wenn er ein n-facher ist und $\frac{\partial^n F}{\partial x^n}(a,b)=\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y}\ldots=\frac{\partial^n F}{\partial y^n}(a,b)=0$ erfüllt.*

Grad

Definition

- *Der Grad von* $x^a y^b$ *ist* $a + b$. *Wir schreiben* $\deg(x^a y^b)$.
- *Der Grad von* $cx^a y^b$ *ist* $a + b$.
- *Der Grad von* $c_1 x^{a_1} y^{b_1} + c_2 x^{a_2} y^{b_2}$ *ist* $\max(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

Aufgaben

Bestimmen Sie die Vielfachheit der Punkte auf den Kurven

- $F(x,y) = x^3 - y^2$, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,-1)$
- $F(x,y) = x^3 - 2x + 1 - y^2$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,0)$
- $F(x,y) = y^2(y-1)(y-2)(y+5) - (x^2-1)^2$, $P_1 = (1,-5)$, $P_2 = (1,0)$

Bestimmen Sie den Grad der Polynome

- $F(x,y) = (x^2+y^2)^2(y-2) + y(4x^4 + x^2 + y^2)$
- $F(x,y) = x^2(3x^2-y^2)^2 + y^2(x^2+y^2)$

Inhalt

Aufgabe

Finden Sie (rationale) Punkte auf den folgenden Kurven

- $F(x,y) = (x^2+y^2)^3 - x^2(x^2+20y^2) + 8y^2(y^2+2) = 0$
- $F(x,y) = (x^2+y^2-1)^3 - x^2y^3 = 0$
- $F(x,y) = x^2+2xy+y^2+x+2y-2 = 0$

Parametrisierung

Definition

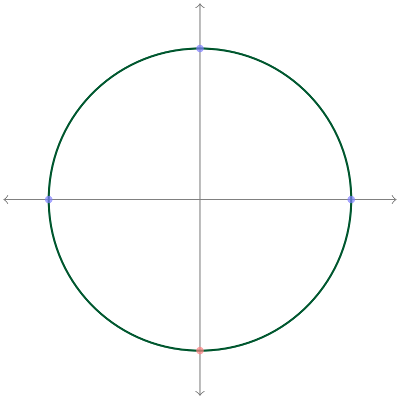
Sei $\mathcal{C} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid F(a,b) = 0\}$ *eine algebraische Kurve. Eine (rationale) Parametrisierung* $\mathcal{P}(t)$ *von* $\mathcal{C}$ *ist ein Paar* $\mathcal{P}(t) = (r(t), s(t))$ *für das gilt:*

- $F(r(t), s(t)) = 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.
- *Für fast alle Punkte* $(x, y) \in \mathcal{C}$ *gibt es ein* t*, sodass* $\mathcal{P}(t) = (x, y)$.
- *Die beiden Komponenten* r *und* s *sind rationale Funktionen, also von der Form*

$$\frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m}$$

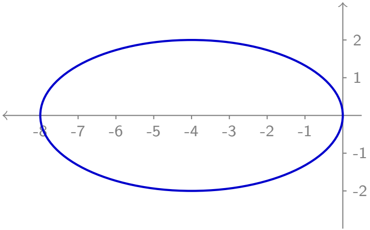
Beispiel

- $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$
- $\mathcal{P}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$
- $\mathcal{P}(0) = (0,1)$
- $\mathcal{P}(1) = (1,0)$
- $\mathcal{P}(-1) = (-1,0)$



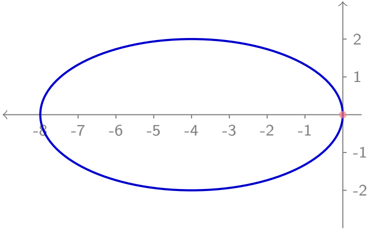
Idee

- Gegeben sei eine Kurve $\mathcal{C}$ vom Grad d



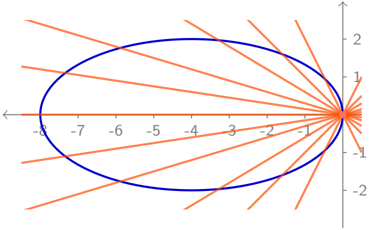
Idee

- Gegeben sei eine Kurve $\mathcal{C}$ vom Grad d
- Wir nehmen an, der Ursprung sei ein $(d-1)$-facher Punkt von $\mathcal{C}$.



Idee

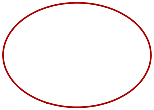
- Gegeben sei eine Kurve $\mathcal{C}$ vom Grad d
- Wir nehmen an, der Ursprung sei ein $(d-1)$-facher Punkt von $\mathcal{C}$.
- Geradenschar $h(x,y) = y - tx$



Aufgabe

Finden Sie eine Parametrisierung der folgenden Kurven

Ellipse



$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$

Neilsche Parabel

$x^3 - y^2$

Kartesisches Blatt

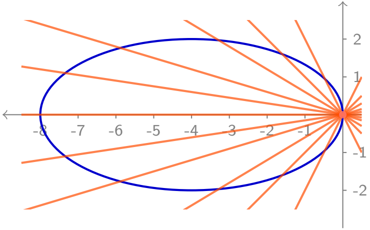
$x^3 + y^3 - 3xy$

Maclaurin Trisektrix

$y^2(a - x) - x^2(x + 3a)$

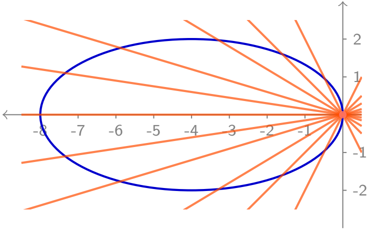
Idee

- Gegeben sei eine Kurve $\mathcal{C}$ vom Grad d
- Wir nehmen an, der Ursprung sei ein $(d-1)$-facher Punkt von $\mathcal{C}$.
- Geradenschar $h(x,y) = y - tx$



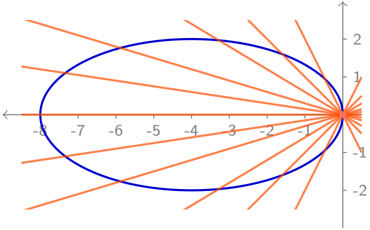
Algorithmus

- Gegeben sei eine Kurve $\mathcal{C}$ vom Grad d
- Wir nehmen an, der Ursprung sei ein $(d-1)$-facher Punkt von $\mathcal{C}$.
- Geradenschar $h(x,y) = y - tx$
- $F(x,y) = F_d(x,y) + F_{d-1}(x,y)$



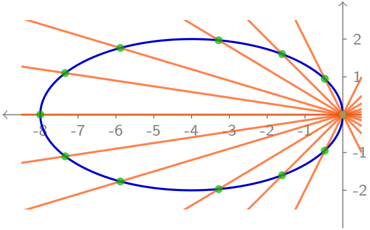
Algorithmus

- Gegeben sei eine Kurve $\mathcal{C}$ vom Grad d
- Wir nehmen an, der Ursprung sei ein $(d-1)$-facher Punkt von $\mathcal{C}$.
- Geradenschar $h(x,y) = y - tx$
- $F(x,y) = F_d(x,y) + F_{d-1}(x,y)$
- $F(x,tx) = x^{d-1}(xF_d(1,t) + F_{d-1}(1,t))$



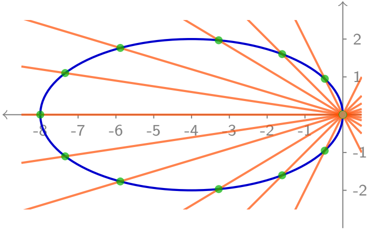
Algorithmus

- Gegeben sei eine Kurve $\mathcal{C}$ vom Grad d
- Wir nehmen an, der Ursprung sei ein $(d-1)$-facher Punkt von $\mathcal{C}$.
- Geradenschar $h(x,y) = y - tx$
- $F(x,y) = F_d(x,y) + F_{d-1}(x,y)$
- $F(x,tx) = x^{d-1}(xF_d(1,t) + F_{d-1}(1,t))$
- $g(x) = xF_d(1,t) + F_{d-1}(1,t)$



Algorithmus

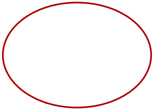
- Gegeben sei eine Kurve $\mathcal{C}$ vom Grad d
- Wir nehmen an, der Ursprung sei ein $(d-1)$-facher Punkt von $\mathcal{C}$.
- Geradenschar $h(x, y) = y - tx$
- $F(x, y) = F_d(x, y) + F_{d-1}(x, y)$
- $F(x, tx) = x^{d-1}(xF_d(1, t) + F_{d-1}(1, t))$
- $g(x) = xF_d(1, t) + F_{d-1}(1, t)$
- Parametrisierung: $(-\frac{F_d(1,t)}{d_{d-2}(1,t)}, -t\frac{F_d(1,t)}{d_{d-2}(1,t)})$



Aufgabe/Lösung

Finden Sie eine Parametrisierung der folgenden Kurven

Ellipse



$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$

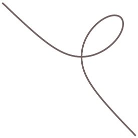
$\left(\frac{2ab^2}{a^2t^2+b^2} + a,\ \frac{2ab^2t}{a^2t^2+b^2}\right)$

Neilsche Parabel

$x^3 - y^2$

(t^2, t^3)

Kartesisches Blatt



$x^3 + y^3 - 3xy$

$\left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1}\right)$

Maclaurin Trisektrix

$y^2(a - x) - x^2(x + 3a)$

$\left(\frac{t^2-3}{t^2+1}, \frac{t\left(t^2-3\right)}{t^2+1}\right)$

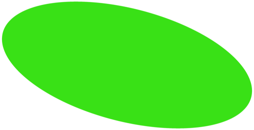
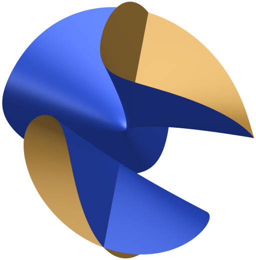
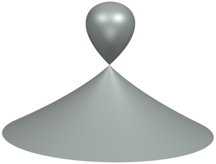
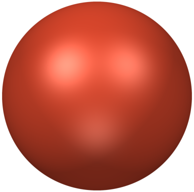
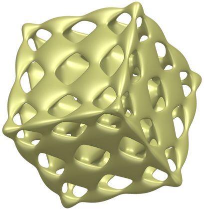
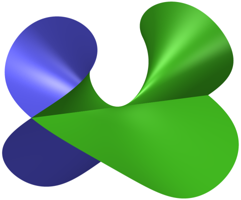
Inhalt

Definition

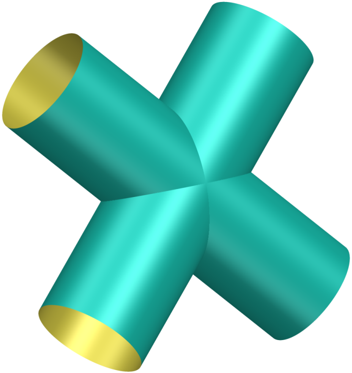
Definition

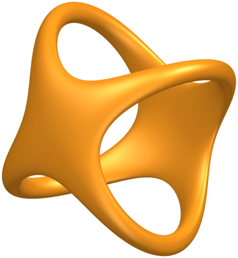
Eine algebraische Fläche $\mathcal{S}$ ist die Lösungsmenge einer Gleichung $F(x, y, z) = 0$, wobei F ein Polynom in x, y und z ist.
Wir schreiben $\mathcal{S} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid F(a, b, c) = 0\}$.

Beispiele

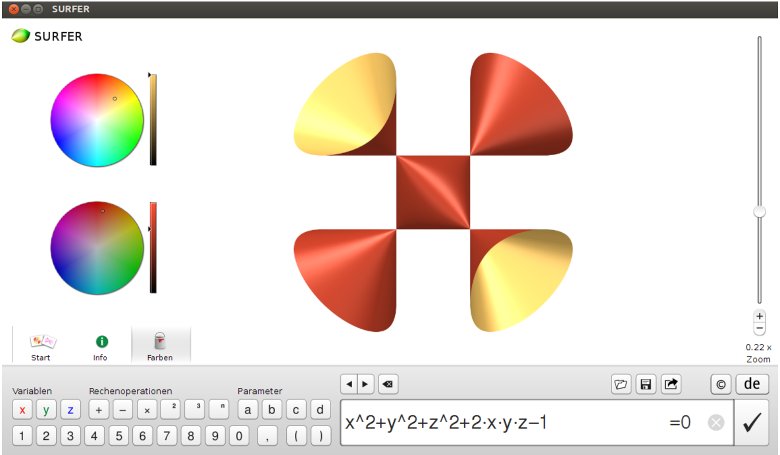







Vereinigung und Schnitt





Surfer



http://imaginary.org/program/surfer