

Mathematik und Musik: Fourieranalyse

Matheseminar JKU Linz WS2015/16

Peter Gangl

Linz

5. Februar 2016



Experimentiere und forsche mit uns!
Dein Interesse in Technik und Naturwissenschaften ist gefragt.



Outline

1 Musik mathematisch betrachtet

2 Fourier-Analyse

Outline

1 Musik mathematisch betrachtet

2 Fourier-Analyse

Einführung

Was ist Musik?



Einführung

Was ist Musik?

- *“Musik ist schwingende Luft”* Daniel Barenboim



Einführung

Was ist Musik?

- *“Musik ist schwingende Luft”* Daniel Barenboim
- Schwingung kann mathematisch beschrieben werden



Einführung

Was ist Musik?

- *“Musik ist schwingende Luft”* Daniel Barenboim
- Schwingung kann mathematisch beschrieben werden
- Klang wird bestimmt durch:



Einführung

Was ist Musik?

- *“Musik ist schwingende Luft”* Daniel Barenboim
- Schwingung kann mathematisch beschrieben werden
- Klang wird bestimmt durch:
 - ① Lautstärke



Einführung

Was ist Musik?

- *“Musik ist schwingende Luft”* Daniel Barenboim
- Schwingung kann mathematisch beschrieben werden
- Klang wird bestimmt durch:
 - 1 Lautstärke
 - 2 Tonhöhe



Einführung

Was ist Musik?

- *“Musik ist schwingende Luft”* Daniel Barenboim
- Schwingung kann mathematisch beschrieben werden
- Klang wird bestimmt durch:
 - 1 Lautstärke
 - 2 Tonhöhe
 - 3 Klangfarbe



Einführung

- 1 Lautstärke: Amplitude (maximale Auslenkung) der Schwingung

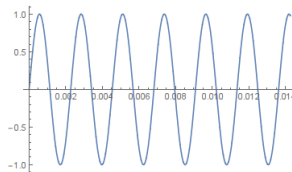
Einführung

- ① Lautstärke: Amplitude (maximale Auslenkung) der Schwingung
- ② Tonhöhe: Frequenz der Schwingung (Anzahl der Wiederholungen einer Schwingung pro Sekunde) [Hz]

Einführung

- ① Lautstärke: Amplitude (maximale Auslenkung) der Schwingung
- ② Tonhöhe: Frequenz der Schwingung (Anzahl der Wiederholungen einer Schwingung pro Sekunde) [Hz]

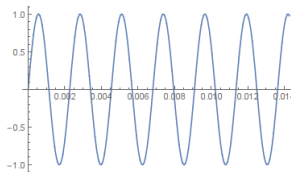
Beispiel: Kammerton a (440 Hz) $\hat{=}$ $\sin(440 * 2\pi t)$



Einführung

- ❶ Lautstärke: Amplitude (maximale Auslenkung) der Schwingung
- ❷ Tonhöhe: Frequenz der Schwingung (Anzahl der Wiederholungen einer Schwingung pro Sekunde) [Hz]

Beispiel: Kammerton a (440 Hz) $\hat{=}$ $\sin(440 * 2\pi t)$



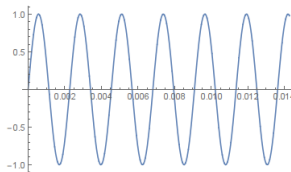
Frequenzverhältnisse:

- Oktave 2:1
- Quint 3:2
- gr. Terz 5:4

Einführung

- ❶ Lautstärke: Amplitude (maximale Auslenkung) der Schwingung
- ❷ Tonhöhe: Frequenz der Schwingung (Anzahl der Wiederholungen einer Schwingung pro Sekunde) [Hz]

Beispiel: Kammerton a (440 Hz) $\hat{=}$ $\sin(440 * 2\pi t)$



Frequenzverhältnisse:

- Oktave 2:1
- Quint 3:2
- gr. Terz 5:4

Aufgabe

Berechne Frequenzen für die Töne der A-Moll-Tonleiter, also

a, h, c, d, e, f, g, a'

Komponieren in Geogebra

Wichtige Befehle:

- $a(x) = \sin(440 * 2 * \pi * x)$

Komponieren in Geogebra

Wichtige Befehle:

- $a(x) = \sin(440 * 2 * \pi * x)$
- $e(x) = \sin(660 * 2 * \pi * x)$

Komponieren in Geogebra

Wichtige Befehle:

- $a(x) = \sin(440 * 2 * \pi * x)$
- $e(x) = \sin(660 * 2 * \pi * x)$
- `SpieleTon[a(x), 0, 10]`

spielt Ton a (den wir gerade definiert haben) vom Zeitpunkt 0 (jetzt) bis zum Zeitpunkt 10 (also zehn Sekunden lang)

Komponieren in Geogebra

Wichtige Befehle:

- $a(x) = \sin(440 * 2\pi * x)$

- $e(x) = \sin(660 * 2\pi * x)$

- $\text{SpieleTon}[a(x), 0, 10]$

spielt Ton a (den wir gerade definiert haben) vom Zeitpunkt 0 (jetzt) bis zum Zeitpunkt 10 (also zehn Sekunden lang)

- $\text{Lied}(x) = \text{Wenn}[x < 1, a(x), e(x)]$

Definiert eine Funktion, die gleich $a(x)$ falls $x < 1$ und gleich $e(x)$ ist sonst.

Komponieren in Geogebra

Wichtige Befehle:

- $a(x) = \sin(440 * 2 * \pi * x)$
- $e(x) = \sin(660 * 2 * \pi * x)$
- `SpieleTon[a(x), 0, 10]`
spielt Ton a (den wir gerade definiert haben) vom Zeitpunkt 0 (jetzt) bis zum Zeitpunkt 10 (also zehn Sekunden lang)
- `Lied(x) = Wenn[x < 1, a(x), e(x)]`
Definiert eine Funktion, die gleich $a(x)$ falls $x < 1$ und gleich $e(x)$ ist sonst.
- `SpieleTon[Lied(x), 0, 3]`
Spielt den Ton a für eine Sekunde und den Ton e für die zwei Sekunden danach

Komponieren in Geogebra

Wichtige Befehle:

- $a(x) = \sin(440 * 2\pi * x)$
- $e(x) = \sin(660 * 2\pi * x)$
- `SpieleTon[a(x), 0, 10]`
spielt Ton a (den wir gerade definiert haben) vom Zeitpunkt 0 (jetzt) bis zum Zeitpunkt 10 (also zehn Sekunden lang)
- $\text{Lied}(x) = \text{Wenn}[x < 1, a(x), e(x)]$
Definiert eine Funktion, die gleich $a(x)$ falls $x < 1$ und gleich $e(x)$ ist sonst.
- `SpieleTon[Lied(x), 0, 3]`
Spielt den Ton a für eine Sekunde und den Ton e für die zwei Sekunden danach

Das Ganze kann man auch ineinander verschachteln:

- $\text{Lied2}(x) = \text{Wenn}[x < 2, \text{Lied}(x), a(x)]$
`SpieleTon[Lied(x), 0, 3]`
Spielt nun hintereinander die Töne a, e, a (jeweils für eine Sekunde)

Komponieren in Geogebra

Wichtige Befehle:

- $a(x) = \sin(440 * 2\pi * x)$
- $e(x) = \sin(660 * 2\pi * x)$
- `SpieleTon[a(x), 0, 10]`
spielt Ton a (den wir gerade definiert haben) vom Zeitpunkt 0 (jetzt) bis zum Zeitpunkt 10 (also zehn Sekunden lang)
- $\text{Lied}(x) = \text{Wenn}[x < 1, a(x), e(x)]$
Definiert eine Funktion, die gleich $a(x)$ falls $x < 1$ und gleich $e(x)$ ist sonst.
- `SpieleTon[Lied(x), 0, 3]`
Spielt den Ton a für eine Sekunde und den Ton e für die zwei Sekunden danach

Das Ganze kann man auch ineinander verschachteln:

- $\text{Lied2}(x) = \text{Wenn}[x < 2, \text{Lied}(x), a(x)]$
`SpieleTon[Lied(x), 0, 3]`
Spielt nun hintereinander die Töne a, e, a (jeweils für eine Sekunde)

Aufgabe

Spiele die C-Dur-Tonleiter in Geogebra!

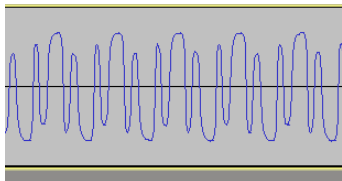
Outline

1 Musik mathematisch betrachtet

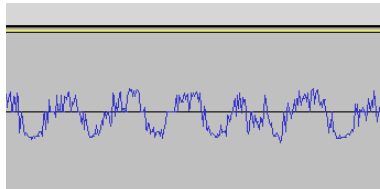
2 Fourier-Analyse

Klangfarbe

Ton g auf Blockflöte

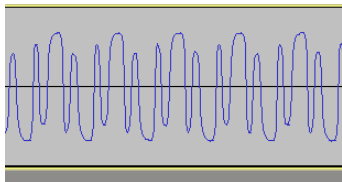


Ton g auf Gitarre

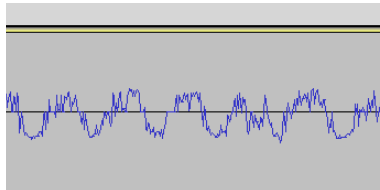


Klangfarbe

Ton g auf Blockflöte



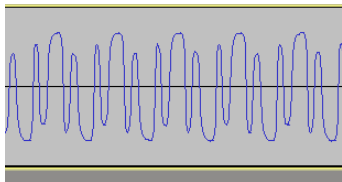
Ton g auf Gitarre



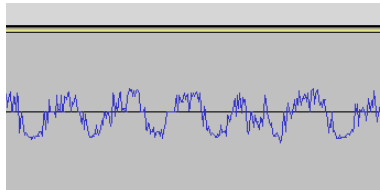
Klangfarbe spiegelt sich in der **Form der Schwingung** wider!

Klangfarbe

Ton g auf Blockflöte



Ton g auf Gitarre



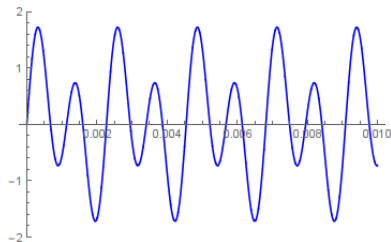
Klangfarbe spiegelt sich in der **Form der Schwingung** wider!

Um Klangfarben zu verstehen, müssen wir diese Schwingungen in ihre Bestandteile zerlegen

↪ **Fourier-Analyse**

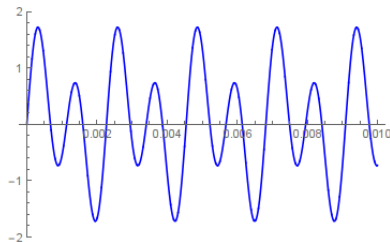
Beispiel einer Schwingung

Frage: Wie können wir dieses Signal am Computer repräsentieren um damit zu arbeiten?

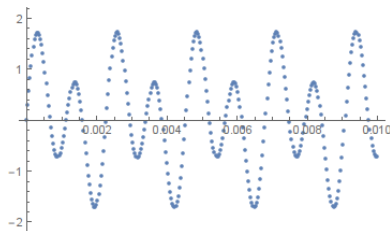


Beispiel einer Schwingung

Frage: Wie können wir dieses Signal am Computer repräsentieren um damit zu arbeiten?

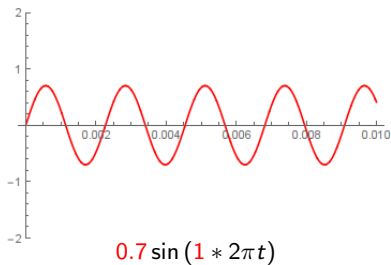
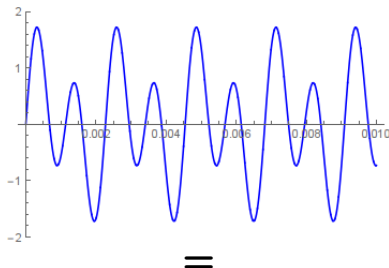


Erste Möglichkeit: Werte Funktion an verschiedenen Punkten aus und merke mir Funktionswerte

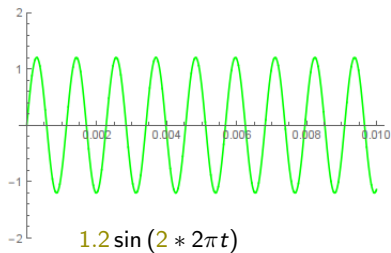


Beispiel einer Schwingung

Zweite Möglichkeit:



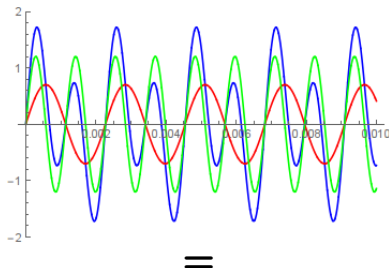
+



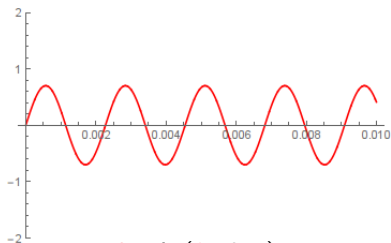
+

Beispiel einer Schwingung

Zweite Möglichkeit:

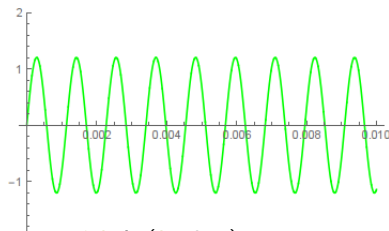


=



$$0.7 \sin(1 * 2\pi t)$$

+

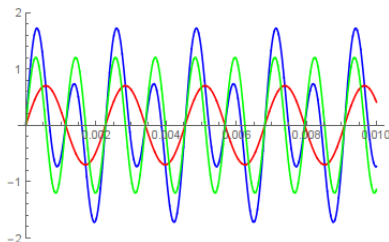


$$1.2 \sin(2 * 2\pi t)$$

+

Beispiel einer Schwingung

Zweite Möglichkeit:



$$f(t) = 0.7 \sin(1 * 2\pi t) + 1.2 \sin(2 * 2\pi t)$$

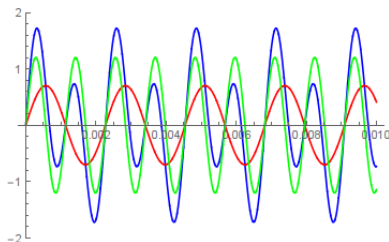
⇒ Können dieselbe Information mit nur 4 Zahlen

0.7, 1, 1.2, 2

beschreiben!

Beispiel einer Schwingung

Zweite Möglichkeit:



$$f(t) = 0.7 \sin(1 * 2\pi t) + 1.2 \sin(2 * 2\pi t)$$

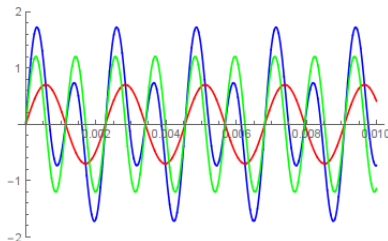
⇒ Können dieselbe Information mit nur 4 Zahlen

0.7, 1, 1.2, 2

beschreiben!

Wird in Dateiformaten wie **.mp3** und **.jpg** zur Datenkompression verwendet!

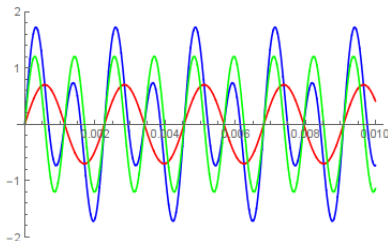
Beispiel einer Schwingung



$$f(t) = 0.7 \sin(1 * 2\pi t) + 1.2 \sin(2 * 2\pi t)$$

Frage: Wie komme ich auf 0.7 bzw. 1.2?

Beispiel einer Schwingung



$$f(t) = 0.7 \sin(1 * 2\pi t) + 1.2 \sin(2 * 2\pi t)$$

Frage: Wie komme ich auf 0.7 bzw. 1.2?



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830):
*Jede stetige Funktion lässt sich als Summe von
 Sinus- und Cosinus-Funktionen darstellen*

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2k\pi t) + B_k \cos(2k\pi t)$$

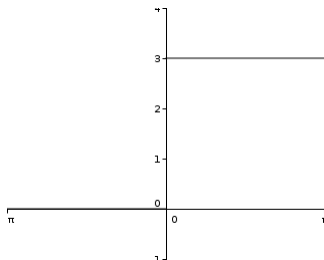
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



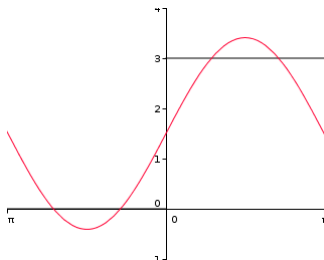
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 1$

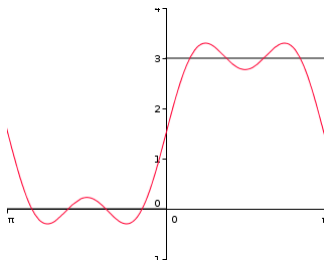
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 3$

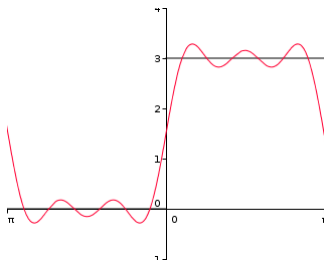
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 5$

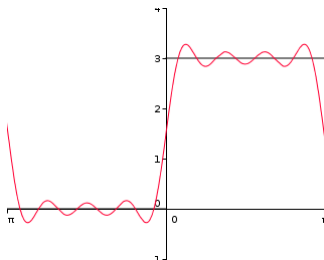
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 7$

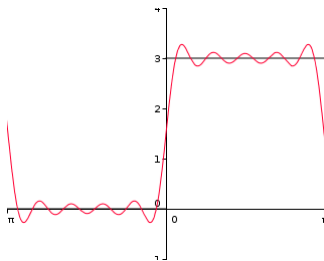
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 9$

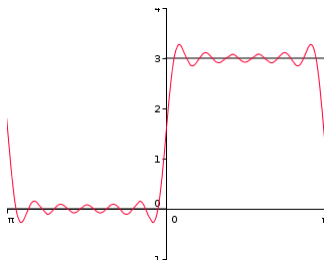
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 11$

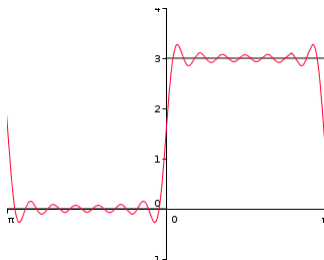
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 13$

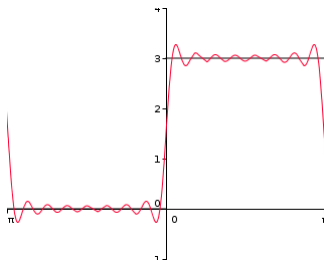
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 15$

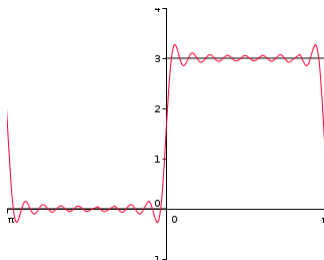
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 17$

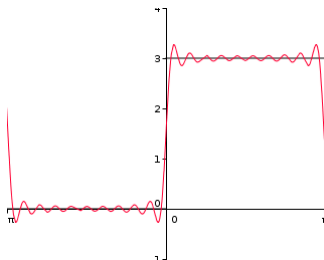
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



$N = 19$

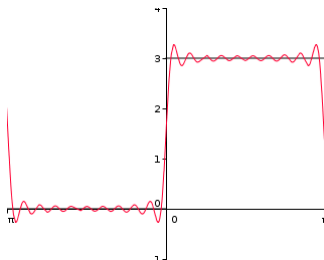
Beispiel

Nähere stückweise konstante Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

an durch Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen,

$$A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin(2 k \pi t) + B_k \cos(2 k \pi t)$$



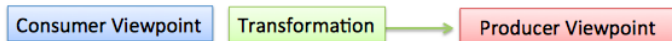
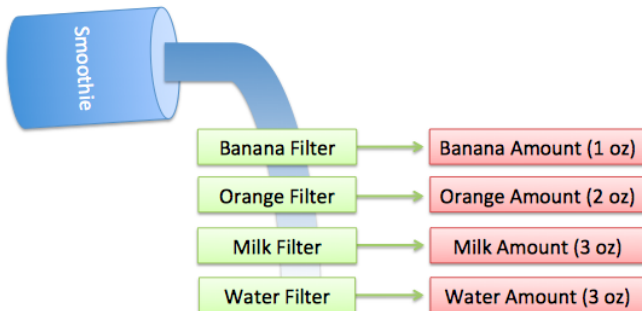
$N = 19$

Frage:

Wie komme ich auf
Koeffizienten A_k, B_k ???

Ähnliches Beispiel: Zerlege Smoothie in Bestandteile und betrachte "Rezept"

Smoothie to Recipe



Quelle: <http://betterexplained.com/articles/an-interactive-guide-to-the-fourier-transform/>

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel 1: $\mathbb{R}^2$

- Die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine **Basis** des Raumes $\mathbb{R}^2$, d.h. jedes Element $v \in \mathbb{R}^2$ kann eindeutig als Kombination von e_1 und e_2 dargestellt werden:

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= v_1 e_1 + v_2 e_2. \end{aligned}$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel 1: $\mathbb{R}^2$

- Die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine **Basis** des Raumes $\mathbb{R}^2$, d.h. jedes Element $v \in \mathbb{R}^2$ kann eindeutig als Kombination von e_1 und e_2 dargestellt werden:

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= v_1 e_1 + v_2 e_2. \end{aligned}$$

- Andere Basis: $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn es gilt

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= w_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= w_1 b_1 + w_2 b_2 \end{aligned}$$

mit $w_1 = v \cdot b_1 = (v, b_1)$, $w_2 = v \cdot b_2 = (v, b_2)$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel 2: $\mathbb{R}^3$

- Die Vektoren $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$ bilden eine **Basis** des Raumes $\mathbb{R}^3$, d.h. jedes Element $v \in \mathbb{R}^3$ kann eindeutig als Kombination von e_1 , e_2 und e_3 dargestellt werden:

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3. \end{aligned}$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel 2: $\mathbb{R}^3$

- Die Vektoren $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$ bilden eine **Basis** des Raumes $\mathbb{R}^3$, d.h. jedes Element $v \in \mathbb{R}^3$ kann eindeutig als Kombination von e_1 , e_2 und e_3 dargestellt werden:

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3. \end{aligned}$$

- Andere Basis: $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)^T$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)^T$, denn es gilt

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= w_1 \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + w_3 \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3 \end{aligned}$$

mit $w_1 = v \cdot b_1 = (v, b_1)$, $w_2 = v \cdot b_2 = (v, b_2)$, $w_3 = v \cdot b_3 = (v, b_3)$.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel 3: $\mathbb{R}^{17}$

$\{b_1, \dots, b_{17}\}$ ist (Orthonormal-)Basis. Dann gibt es für jedes $v \in \mathbb{R}^{17}$ Zahlen $w_1, \dots, w_{17}$, sodass

$$v = w_1 b_1 + w_2 b_2 + \dots + w_{17} b_{17},$$

nämlich $w_1 = v \cdot b_1 = (v, b_1)$, ..., $w_{17} = v \cdot b_{17} = (v, b_{17})$.

Beispiel 4: Menge der stetigen Funktionen auf $(0, 1)$: $C(0, 1)$

Beispiel 4: Menge der stetigen Funktionen auf $(0, 1)$: $C(0, 1)$

$\{1, \sin(1 * \pi * t), \cos(1 * \pi * t), \sin(2 * \pi * t), \cos(2 * \pi * t), \sin(3 * \pi * t), \cos(3 * \pi * t), \dots\}$ ist eine **Basis von $C(0, 1)$** , weil laut Fourier, jede stetige Funktion (eindeutig) als Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen dargestellt werden kann.

Beispiel 4: Menge der stetigen Funktionen auf $(0, 1)$: $C(0, 1)$

$\{1, \sin(1 * \pi * t), \cos(1 * \pi *, t), \sin(2 * \pi * t), \cos(2 * \pi *, t), \sin(3 * \pi * t), \cos(3 * \pi *, t), \dots\}$ ist eine **Basis von $C(0, 1)$** , weil laut Fourier, jede stetige Funktion (eindeutig) als Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen dargestellt werden kann.

Auch hier gilt, dass jedes Element (also jede Funktion) f aus dem Raum $C(0, 1)$ eindeutig als Kombination der Basis-Elemente dargestellt werden kann, also

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_1 \sin(1 * \pi * t) + B_1 \cos(1 * \pi *, t) \\ &\quad + A_2 \sin(2 * \pi * t) + B_2 \cos(2 * \pi *, t) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k * \pi * t) + B_k \cos(k * \pi *, t). \end{aligned}$$

Beispiel 4: Menge der stetigen Funktionen auf $(0, 1)$: $C(0, 1)$

$\{1, \sin(1 * \pi * t), \cos(1 * \pi *, t), \sin(2 * \pi * t), \cos(2 * \pi *, t), \sin(3 * \pi * t), \cos(3 * \pi *, t), \dots\}$ ist eine **Basis von $C(0, 1)$** , weil laut Fourier, jede stetige Funktion (eindeutig) als Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen dargestellt werden kann.

Auch hier gilt, dass jedes Element (also jede Funktion) f aus dem Raum $C(0, 1)$ eindeutig als Kombination der Basis-Elemente dargestellt werden kann, also

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_1 \sin(1 * \pi * t) + B_1 \cos(1 * \pi *, t) \\ &\quad + A_2 \sin(2 * \pi * t) + B_2 \cos(2 * \pi *, t) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k * \pi * t) + B_k \cos(k * \pi *, t). \end{aligned}$$

Auch hier gilt, dass die Koeffizienten A_k , B_k einfach einem Skalarprodukt der Funktion f mit der jeweiligen Basisfunktion entsprechen, also

$$A_k = (f(t), \sin(k * \pi * t)), \quad B_k = (f(t), \cos(k * \pi * t)).$$

Beispiel 4: Menge der stetigen Funktionen auf $(0, 1)$: $C(0, 1)$

$\{1, \sin(1 * \pi * t), \cos(1 * \pi * t), \sin(2 * \pi * t), \cos(2 * \pi * t), \sin(3 * \pi * t), \cos(3 * \pi * t), \dots\}$ ist eine Basis von $C(0, 1)$, weil laut Fourier, jede stetige Funktion (eindeutig) als Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen dargestellt werden kann.

Auch hier gilt, dass jedes Element (also jede Funktion) f aus dem Raum $C(0, 1)$ eindeutig als Kombination der Basis-Elemente dargestellt werden kann, also

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_1 \sin(1 * \pi * t) + B_1 \cos(1 * \pi * t) \\ &\quad + A_2 \sin(2 * \pi * t) + B_2 \cos(2 * \pi * t) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k * \pi * t) + B_k \cos(k * \pi * t). \end{aligned}$$

Auch hier gilt, dass die Koeffizienten A_k, B_k einfach einem Skalarprodukt der Funktion f mit der jeweiligen Basisfunktion entsprechen, also

$$A_k = (f(t), \sin(k * \pi * t)), \quad B_k = (f(t), \cos(k * \pi * t)).$$

In diesem Raum muss man allerdings ein anderes Skalarprodukt wählen, nämlich

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Somit gilt $A_k = \int_0^1 f(t) \sin(k * \pi * t) dt$ und $B_k = \int_0^1 f(t) \cos(k * \pi * t) dt$.

Aufgaben

- ④ Stelle den Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ durch die zwei Basisvektoren

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dar!

Aufgaben

- ① Stelle den Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ durch die zwei Basisvektoren

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dar!

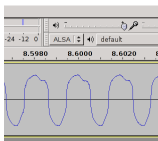
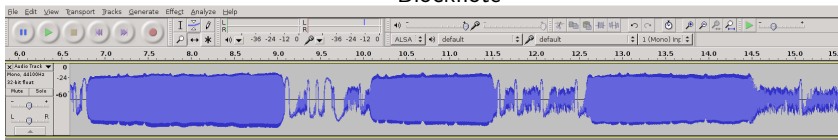
- ② Berechne die Koeffizienten A_1, A_2, B_1, B_2 der Fourierreihe der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} -1 & t < 1/2 \\ 1 & t > 1/2 \end{cases}$$

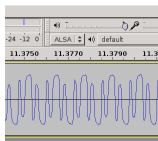
auf dem Intervall $(0, 1)$!

Fourier-Analyse

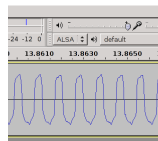
Fourier-Analyse = Übergang von Zeitbereich in Frequenzbereich
Blockflöte



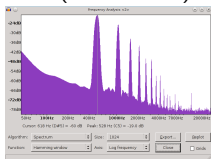
c1 (Zeitbereich)



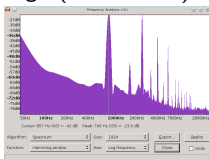
g1 (Zeitbereich)



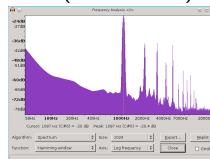
c2 (Zeitbereich)



c1 (Frequenzbereich)



g1 (Frequenzbereich)

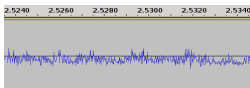
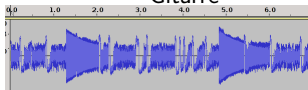


c2 (Frequenzbereich)

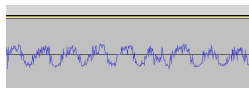
Fourier-Analyse

Fourier-Analyse = Übergang von Zeitbereich in Frequenzbereich

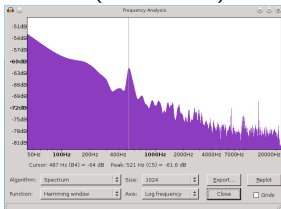
Gitarre



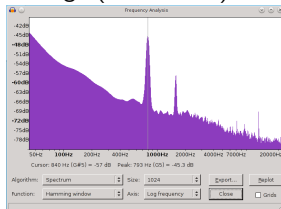
c1 (Zeitbereich)



g1 (Zeitbereich)



c1 (Frequenzbereich)

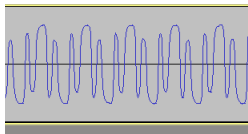


g1 (Frequenzbereich)

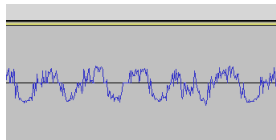
Vergleich Ton g: Blockflöte - Gitarre

Zeitbereich

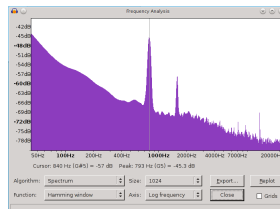
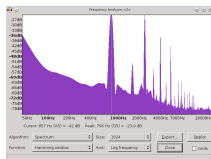
Blockflöte



Gitarre



Frequenzbereich



Komponieren in Geogebra

(Haus-)Aufgabe

Komponiere "Hänsel und Gretel" in Geogebra! ;-)

Komponieren in Geogebra

(Haus-)Aufgabe

Komponiere "Hänsel und Gretel" in Geogebra! ;-)

Viel Spaß beim Komponieren!

Komponieren in Geogebra

(Haus-)Aufgabe

Komponiere "Hänsel und Gretel" in Geogebra! ;-)

Viel Spaß beim Komponieren!

Ankündigungen

- Schülerprojektwoche Angewandte Mathematik, Schloss Weinberg (Kefermarkt), 7.-11.02.2016
- Matheseminar Sommersemester 2016: Anmeldung ab **01.03.2016**