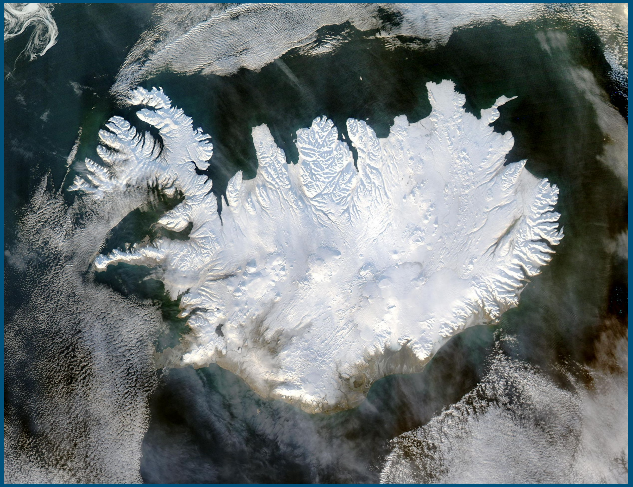
Museumswächter, Bühnenbeleuchtung, Staubsaugerroboter

Hat das etwas miteinander zu tun?

Aufgabenheft

Bjarnheiður Kristinsdóttir (Bea) 2017

Wer ich bin?

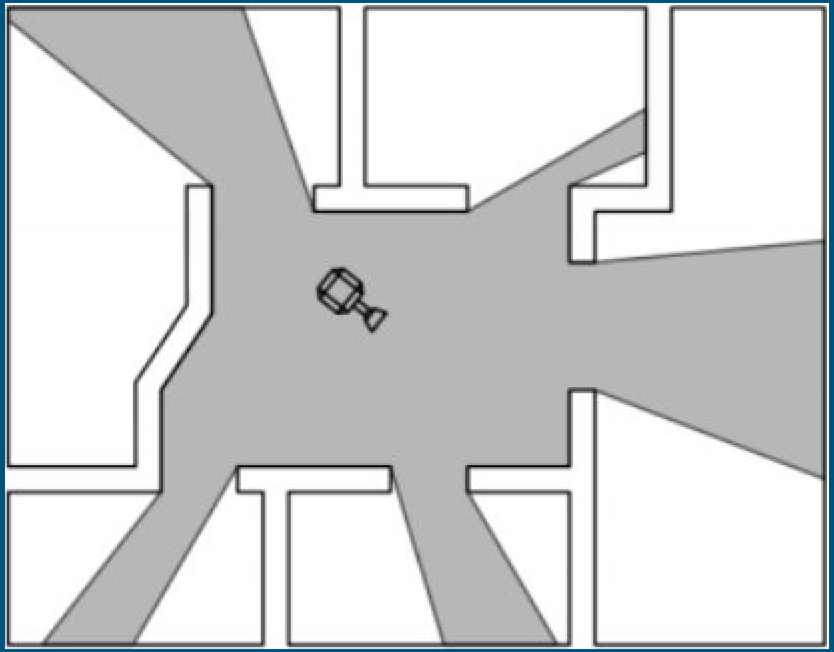


Bea aus Island

B.Sc. in Mathematik von der Uni Islands

Diplom der angewandten Mathematik in Geowissenschaften (Schwerpunkt: Fernerkundung) von der TU Bergakademie Freiberg in Deutschland

Stellt euch ein Museum vor...

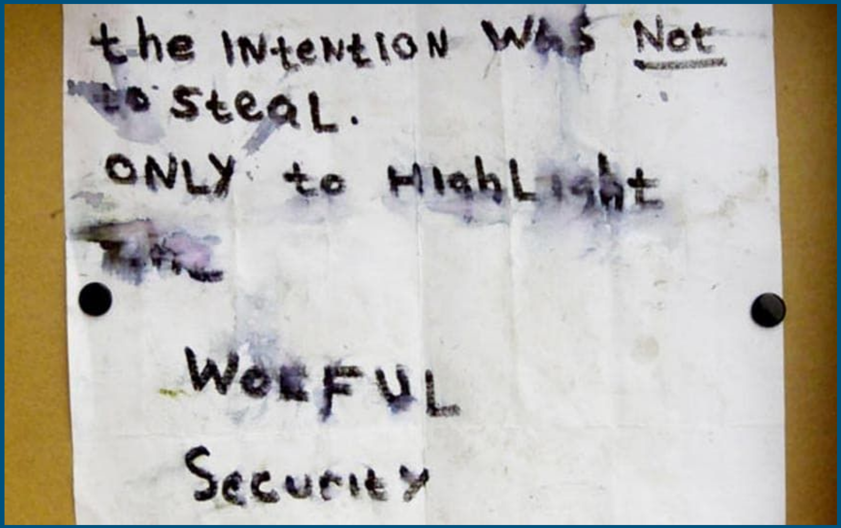


Das Museum hat einen Grundriss in Form eines einfachen in der Ebene liegenden Polygons.

Wie viele Überwachungskameras braucht man, um das Museum komplett zu überwachen?

Wo sollte man diese positionieren?

Diebstahl… oder nicht?



Es war nicht unsere Absicht zu stehlen.

Nur, auf die beklagenswerte Sicherheitsleistung aufmerksam zu machen.

Manchester Whitworth Gallery, Großbritannien

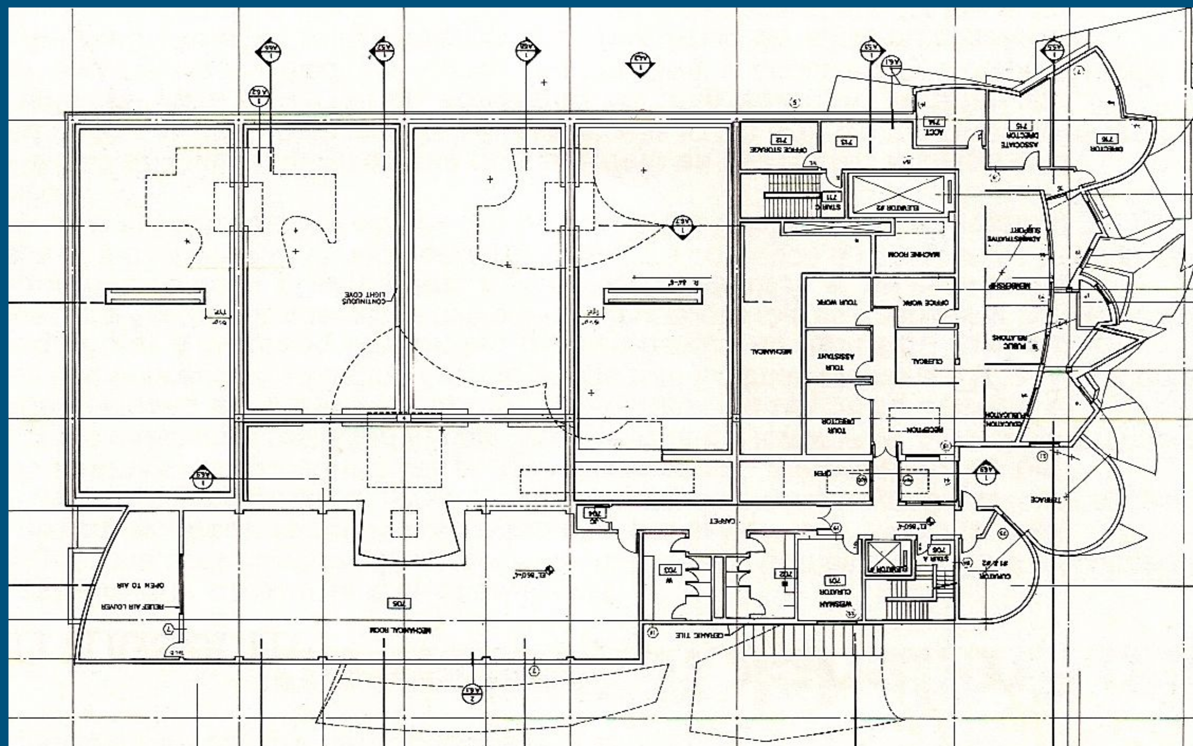
Es gibt allerlei geformte Museen

Guggenheim Museum, Bilbao, Spanien

Manch ein Museum ist recht verwinkelt

Weisman Museum, Minneapolis, Minnesota, USA

Wächter und Kameras überwachen die Kunst



Aber wie sollte man diese positionieren?

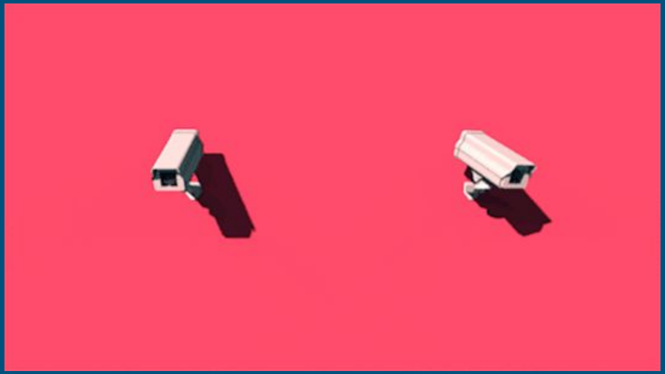
Fragestellung

Wie viele Wächter (bzw. Überwachungskameras) braucht man, um ein Museum vollständig zu überwachen;

unter der Voraussetzung,

dass die Wächter an ihrer Position bleiben,

aber sich um jeden Winkel drehen können?



→ Stellen wir die Frage gleich noch mal auf eine mathematische Weise

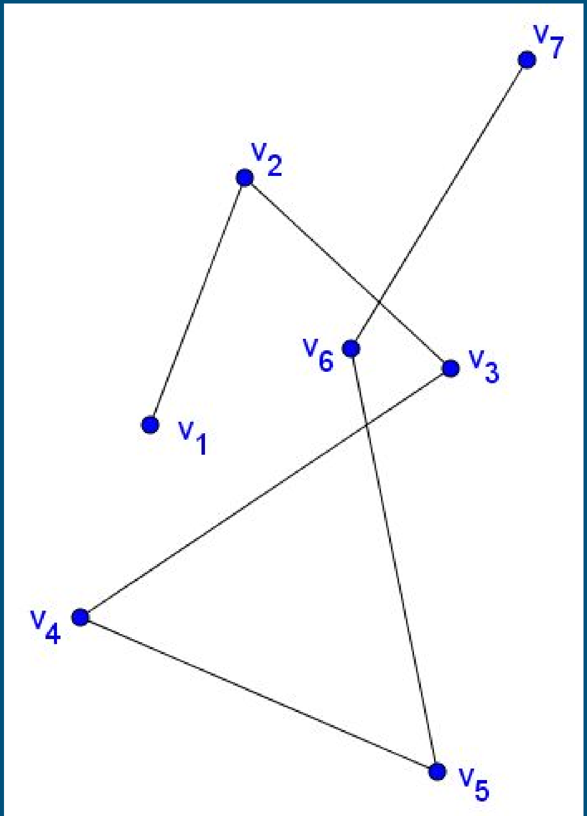
Problem der Museumswächter

Gestellt von Victor Klee (1925-2007) im Jahr 1973:

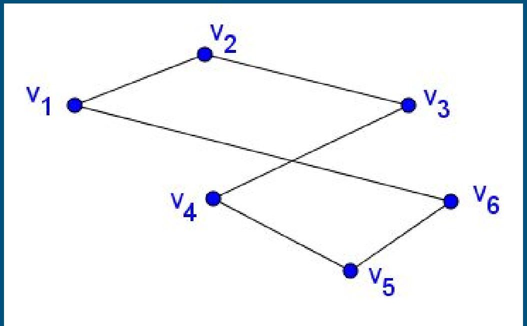
Gegeben sei eine polygonale Fläche G mit Rand δG, interpretiert als Grundriss eines Museums. Wähle nun möglichst wenige Punkte $p_1, p_2, \dots p_n$ (Wächter) im Inneren des Polygons, sodass jeder Punkt im Inneren des Polygons durch eine Gerade, die ganz in G einschließlich Rand liegt, mit einem Wächter verbunden werden kann.

Polygonale Fläche?

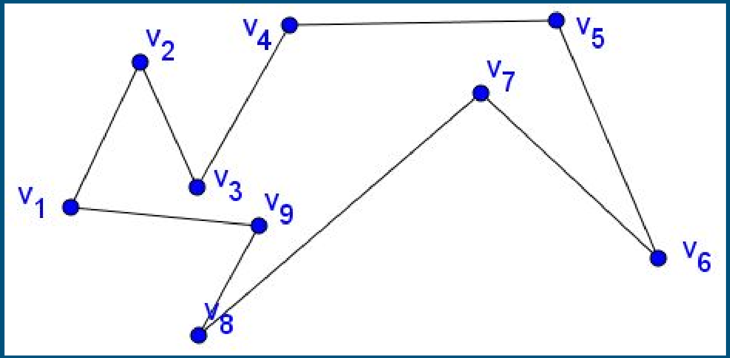
Eine polygonale Kurve



Eine überschlagene polygonale Fläche



Eine einfache Polygonale Fläche



Wir arbeiten mit einfachen Polygonen in der Ebene

Zur Definition eines Polygons

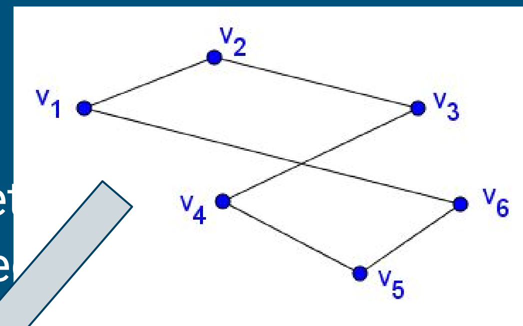
Ein Polygon ist eine ebene geometrische Figur, die durch einen geschlossenen Streckenzug gebildet und/oder begrenzt wird.

Schneiden (berühren) sich die Kanten nicht nur in den Eckpunkten, bezeichnet man das Polygon als *überschlagen*. Liegt keine Selbstüberschneidung vor, bezeichnet man das Polygon als *einfach*.

Nicht überschlagene Vielecke können *konvex* (alle Innenwinkel sind kleiner als 180°) oder *konkav* (mindestens ein Innenwinkel ist größer als 180°) sein.

Man unterscheidet in der Ebene liegende (*planare, ebene*) und im Raum liegende (*nicht-planare*) Polygone.

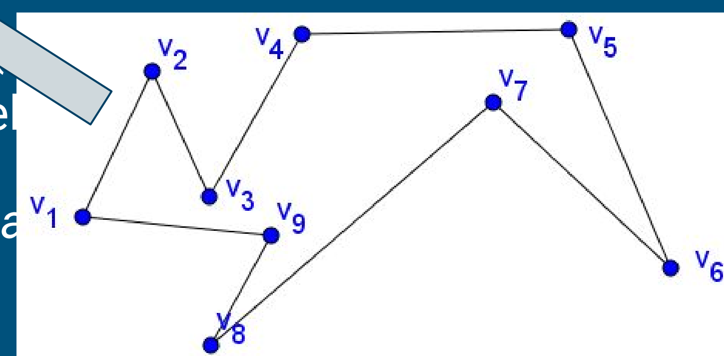
Zur Definition eines Polygons



Ein Polygon ist eine ebene geomet inen geschlossenen Streckenzug gebildet und/oder be

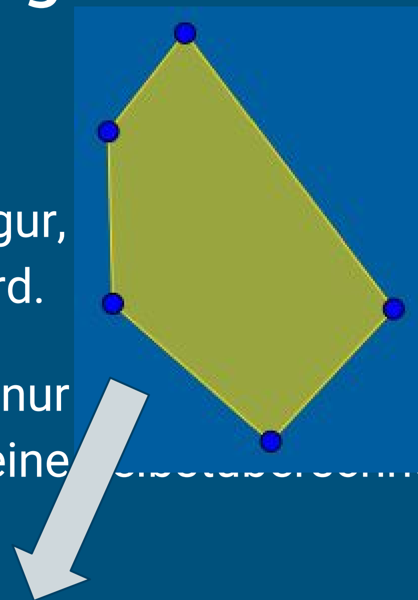
Schneiden (berühren) sich die nten nicht nur in den Eckpunkten, bezeichnet man das Polygon als *überschlagen*. Liegt keine Selbstüberschneidung vor, bezeichnet man das Polygon als *einfach*.

Nicht überschlagene Vielecke können *konvex* 180°) oder *konkav* (mindestens ein Innenwinkel



Man unterscheidet in der Ebene liegende (*plana* (*nicht-planare*) Polygone.

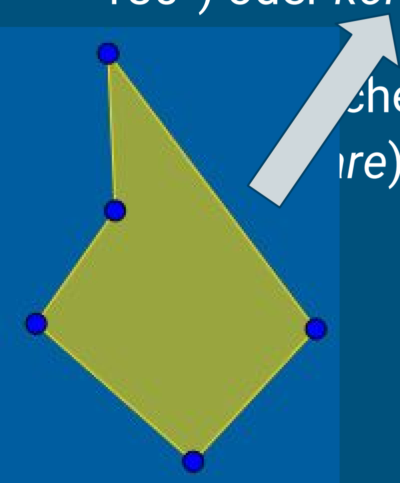
Zur Definition eines Polygons



Ein Polygon ist eine ebene geometrische Figur, geschlossenen Streckenzug gebildet und/oder begrenzt wird.

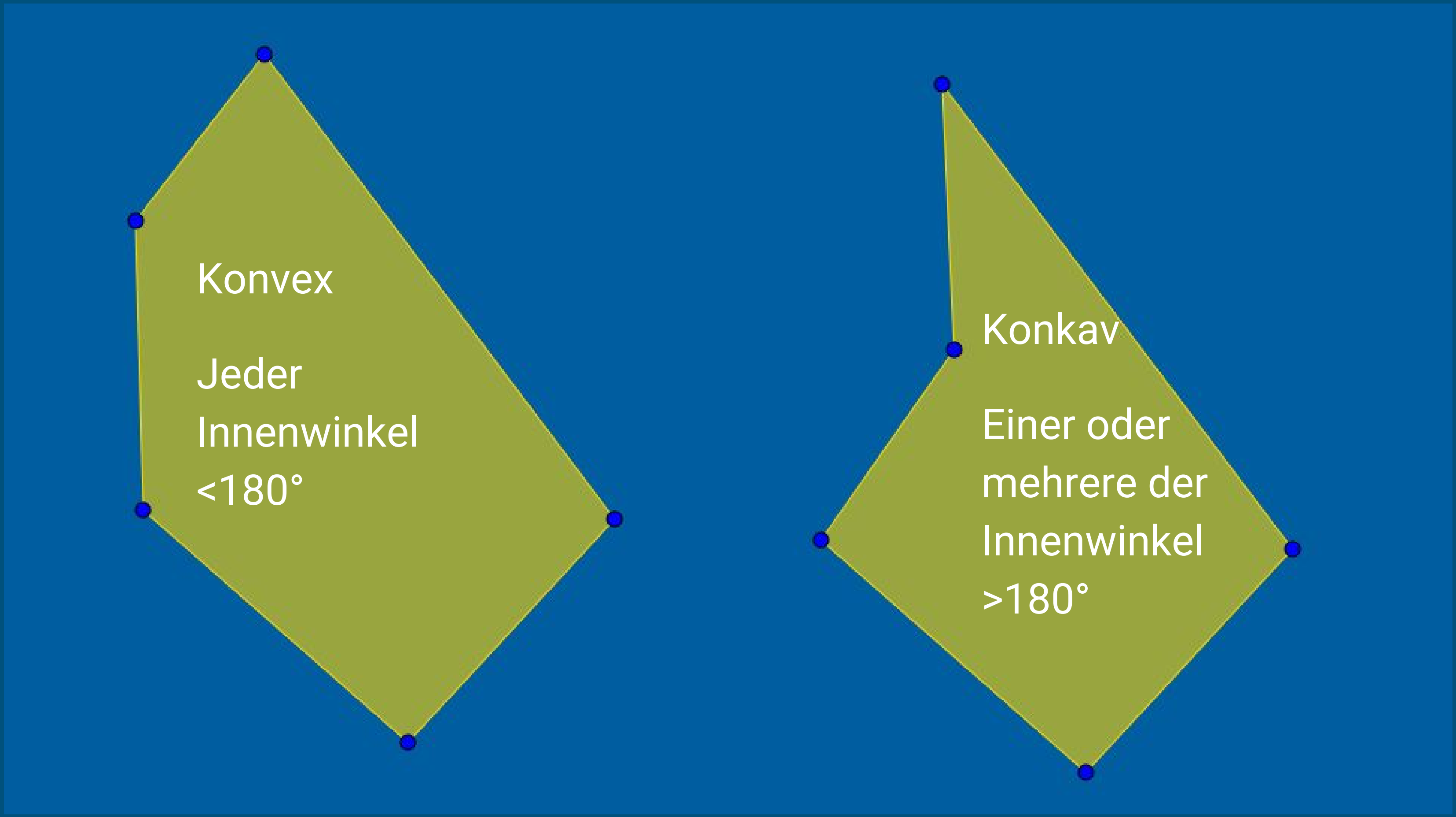
Schneiden (berühren) sich die Kanten nicht nur en, bezeichnet man das Polygon als *überschlagen*. Liegt keine eidung vor, bezeichnet man das Polygon als *einfach*.

Nicht überschlagene Vielecke können *konvex* (alle Innenwinkel sind kleiner als 180°) oder *konkav* (mindestens ein Innenwinkel ist größer als 180°) sein.

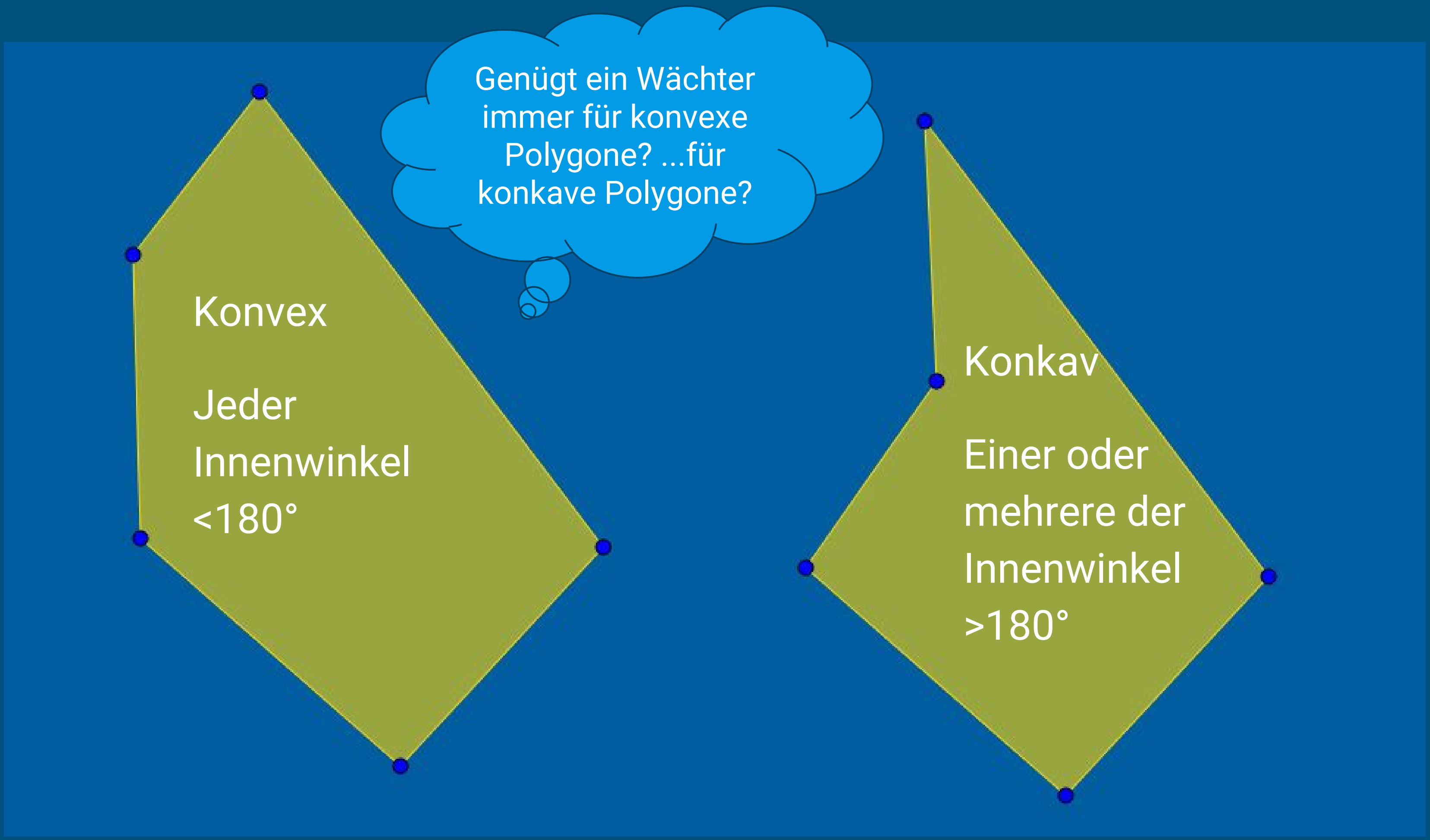


cheidet in der Ebene liegende (*planare*) und im Raum liegende *re*) Polygone.

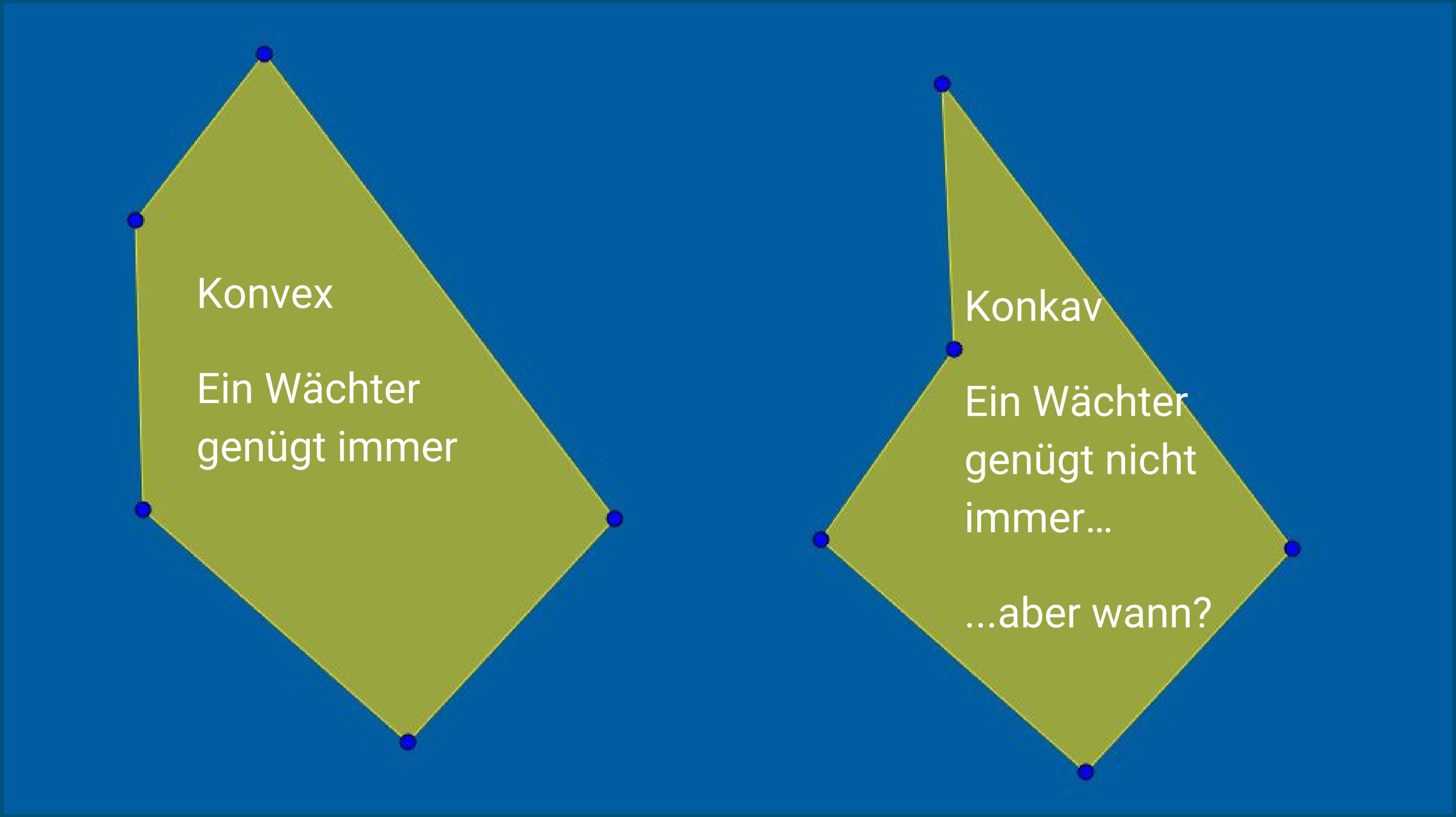
Konvex vs. konkav



Konvex vs. konkav

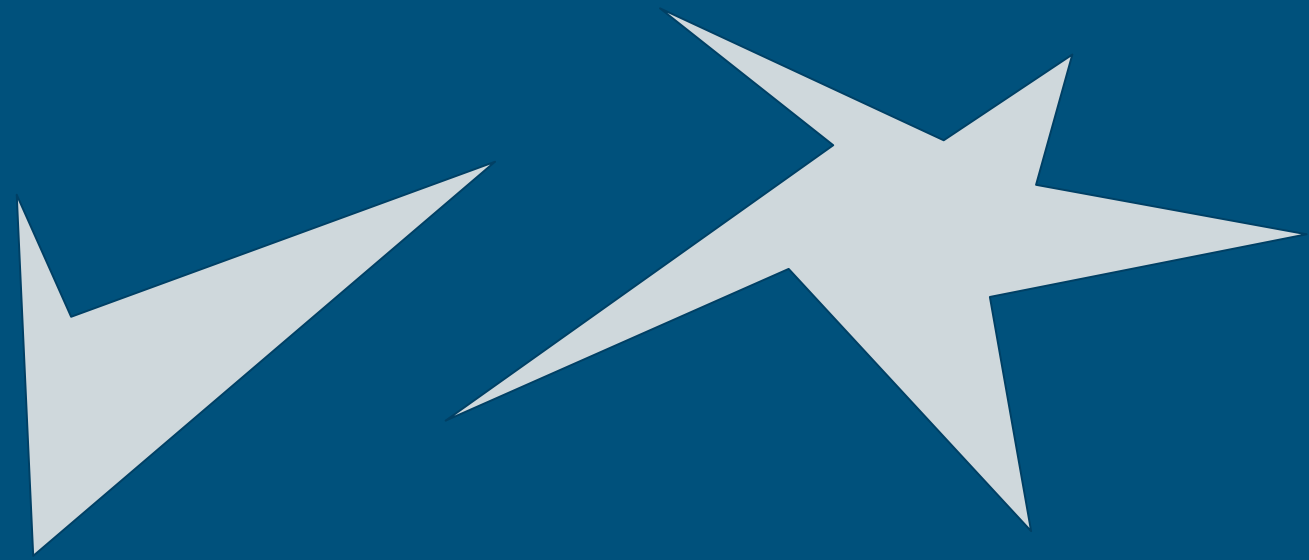


Konvex vs. konkav



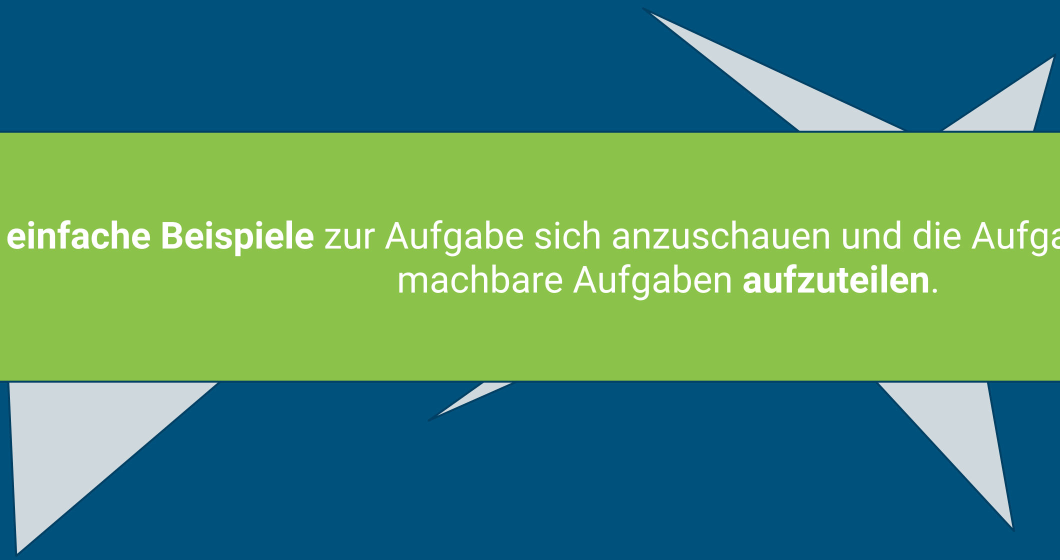
1. Aufgabe

Bestimme für welche Eckenanzahl ein konkaves Polygon immer von einem Wächter komplett überwacht werden kann.



1. Aufgabe umformuliert

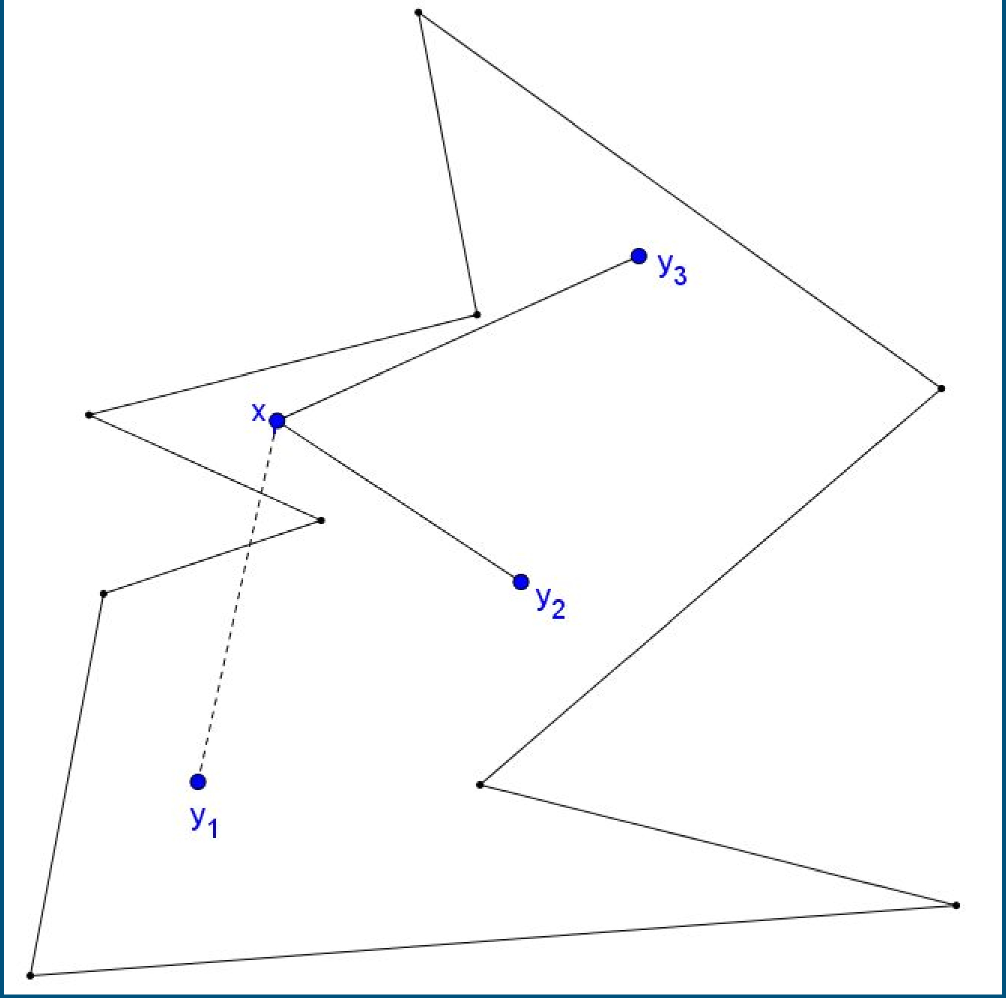
Bestimme für welche Eckenanzahl ein konkaves Polygon immer von einem Wächter komplett überwacht werden kann.



Es hilft, **einfache Beispiele** zur Aufgabe sich anzuschauen und die Aufgabe in kleinere, einfacher machbare Aufgaben **aufzuteilen**.

Zeichne den Grundriss eines konkaven Museums mit n = 4 Ecken. Wie viele Wächter brauchst du im schlimmsten Fall? Was wenn n = 5, n = 6 oder n = 7 ?

Wann gilt ein Ort als überwacht?



Ein Wächter an Stelle *x* überwacht den Ort *y* wenn das Segment *xy* nirgendwo die Fläche außerhalb des Polygons durchläuft.

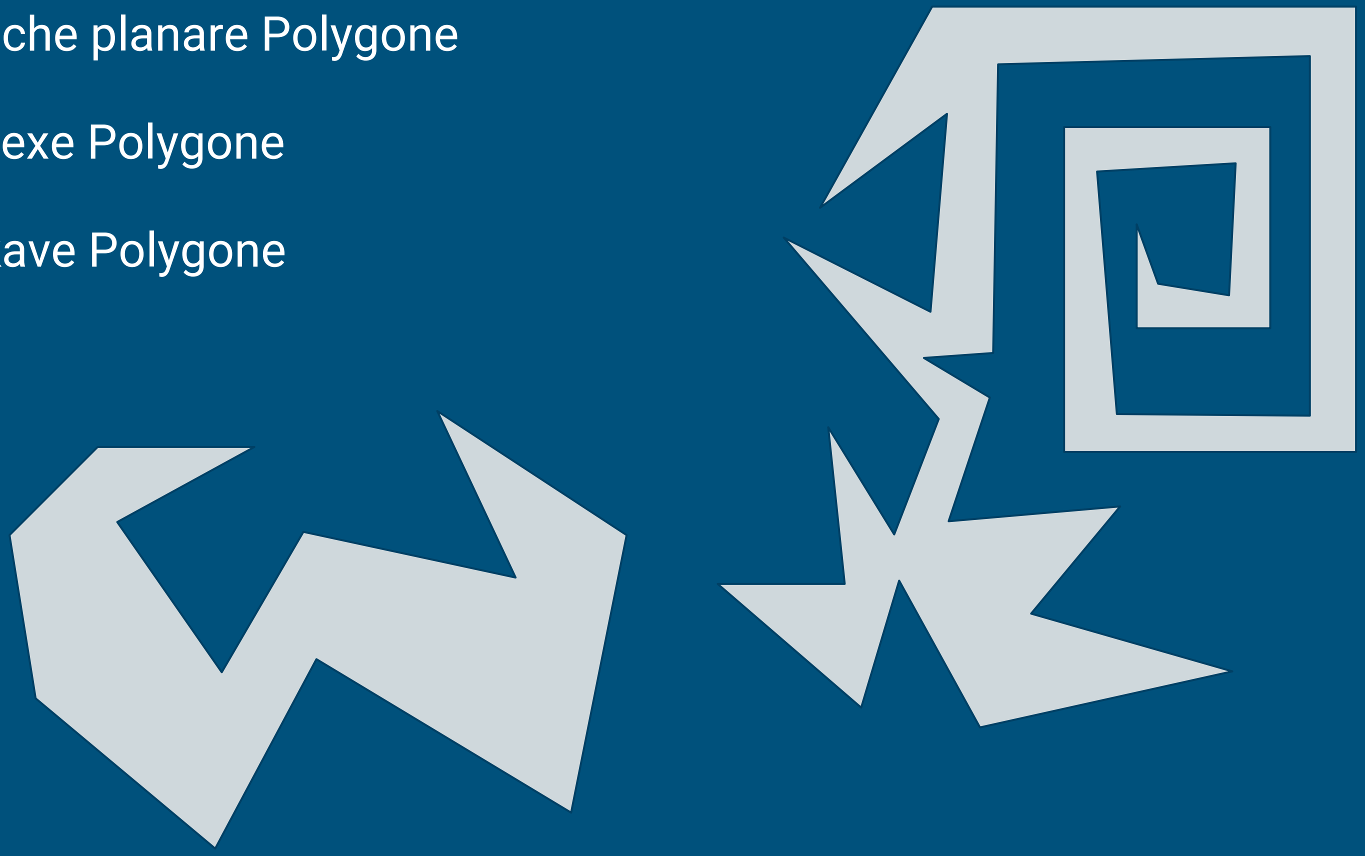
Wir möchten die kleinstmögliche Anzahl an Kameras entscheiden, damit das ganze Polygon überwacht ist.

Museumsgrundrisse

Einfache planare Polygone

Konvexe Polygone

Konkave Polygone



Museumsgrundrisse

Einfache planare Polygone

Konvexe Polygone ← ein Wächter reicht

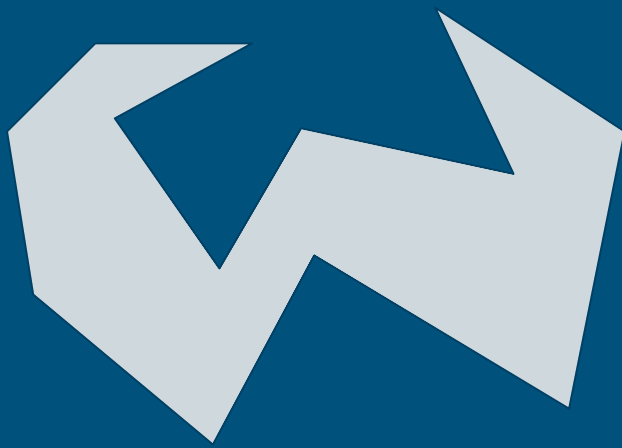
Konkave Polygone

Museumsgrundrisse

Einfache planare Polygone

Konvexe Polygone ← ein Wächter reicht

Konkave Polygone ← wie viele könnten wir da gebrauchen?

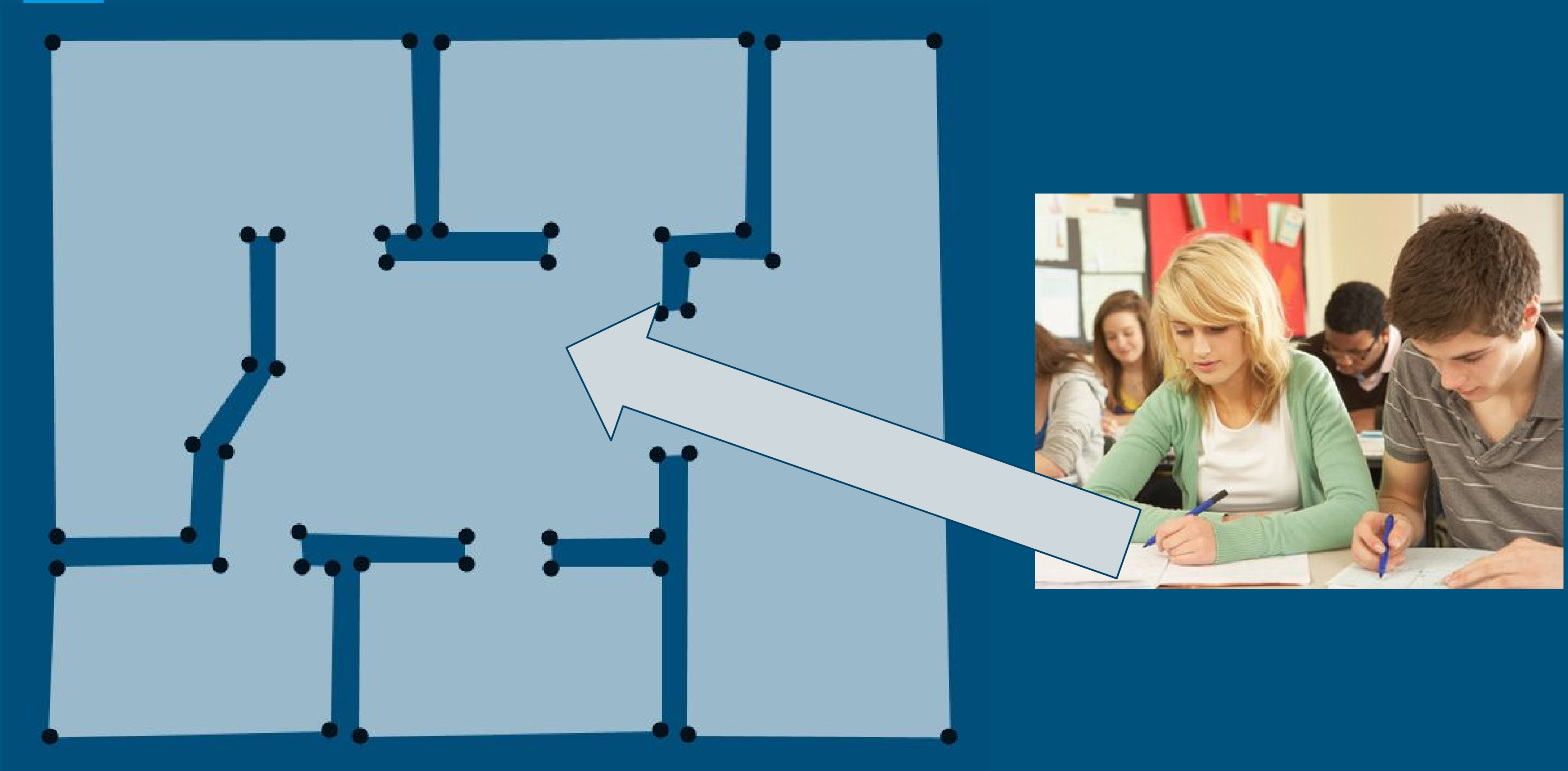


Aufgaben 4 und 5

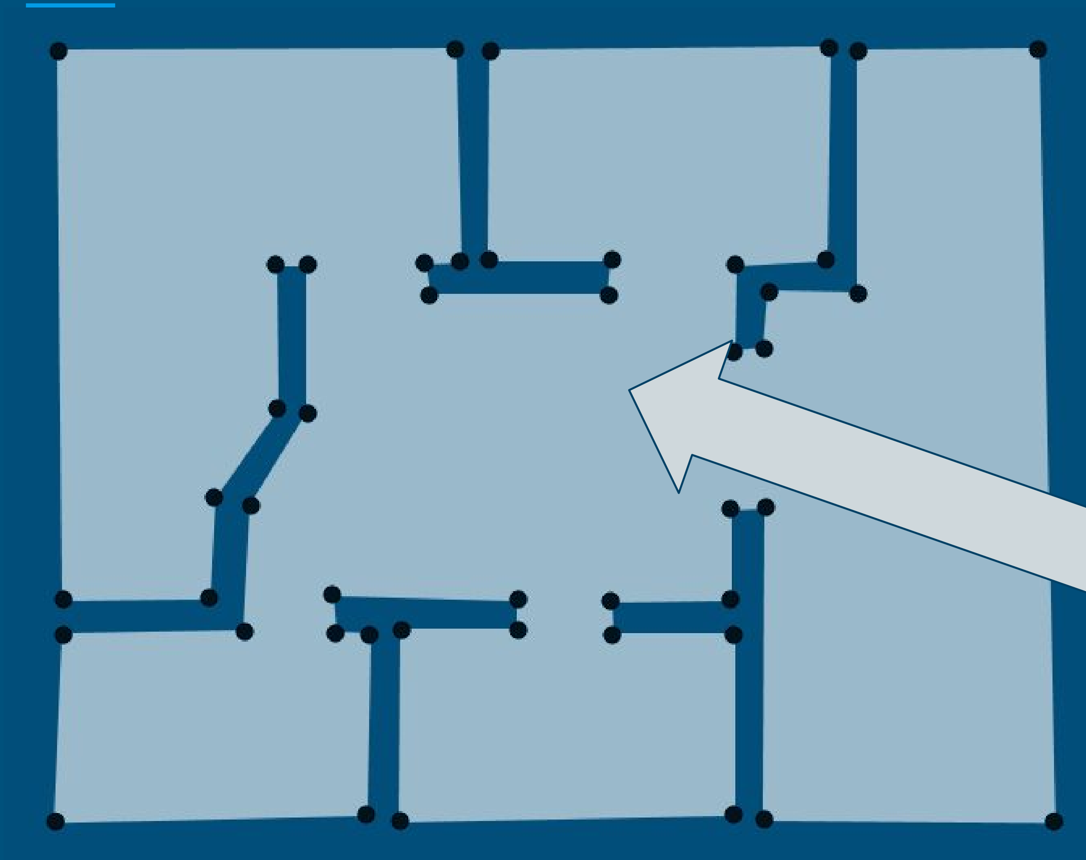
a) Entwerfe ein Grundriss eines Museums als Aufgabe für dein Sitznachbar.

b) Bestimme die minimale Anzahl an Wächter (bzw. Kameras), die für das Museum, das dein Sitznachbar für dich entworfen hat, benötigt wird .

Also einen Grundriss entwerfen…

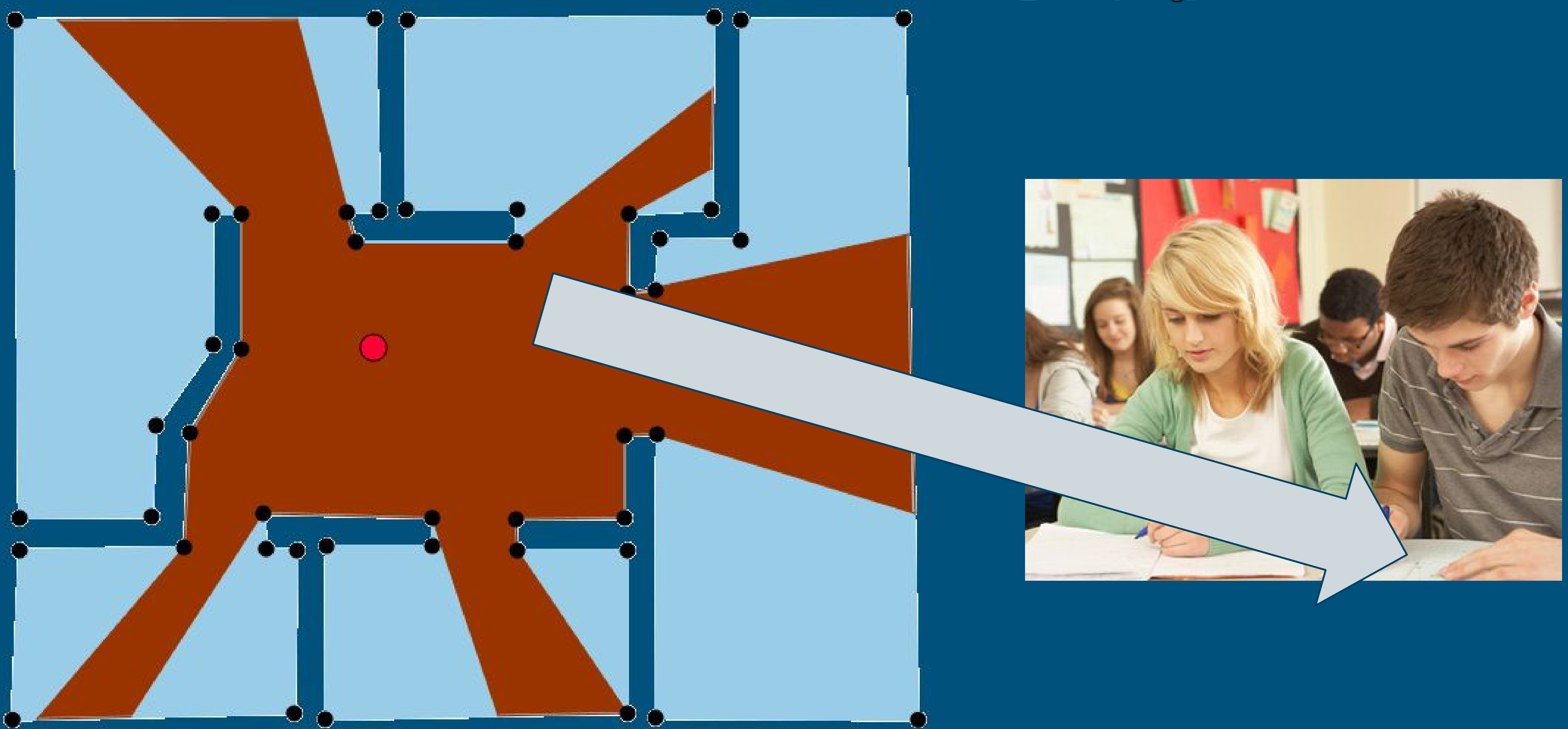


Also einen Grundriss entwerfen in



→ Am besten GeoGebra benutzen (ein Polygon zeichnen), aber natürlich können die ersten Entwürfe mit Bleistift und Papier gemacht werden!

...und das Museum sicher machen mit GeoGebra

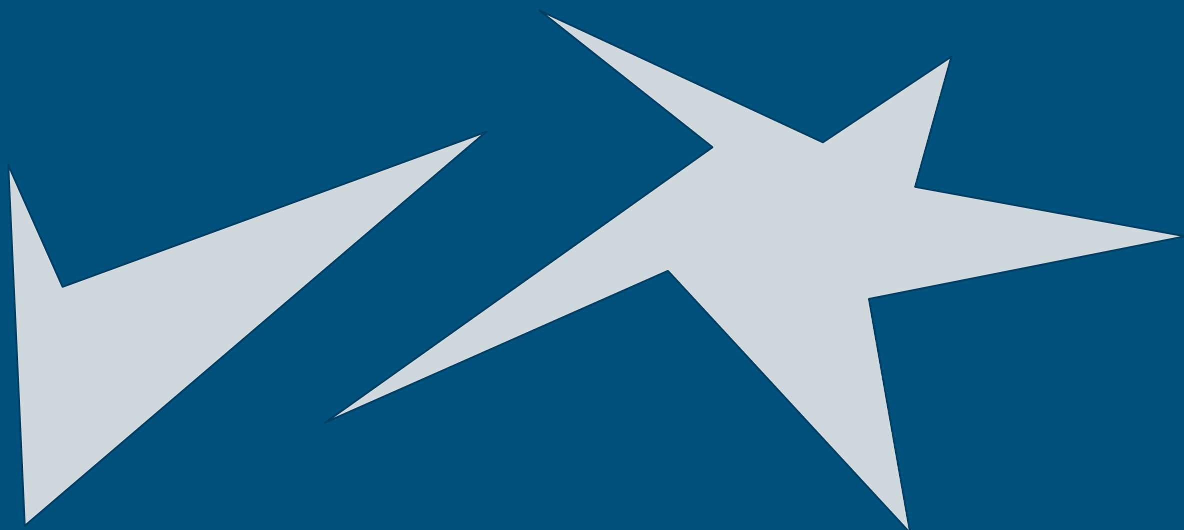


➔ In GeoGebra kann man z.B. mit Geraden, Schnittpunkten und weiteren Polygonen, die Aufsichtsbereiche jeden Wächters bestimmen.

Arbeitsphase I. Ideen entwickeln

Aufgaben 1-5

Falls es mit GeoGebra nicht klappt, dann mit der Hand zeichnen (bitte dann aber Lineal oder ähnliches benutzen, damit die Strecken gerade sind).

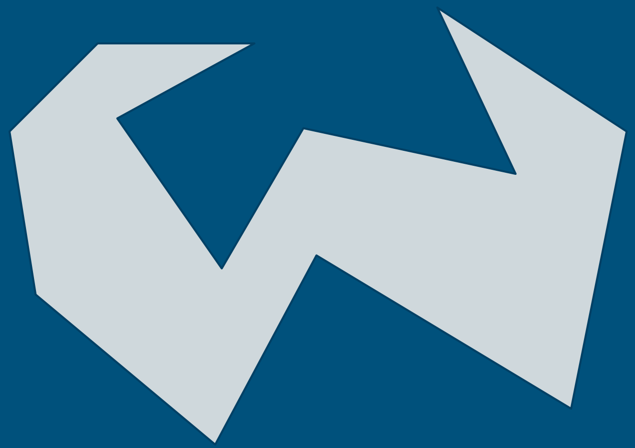


Museum-Grundrisse

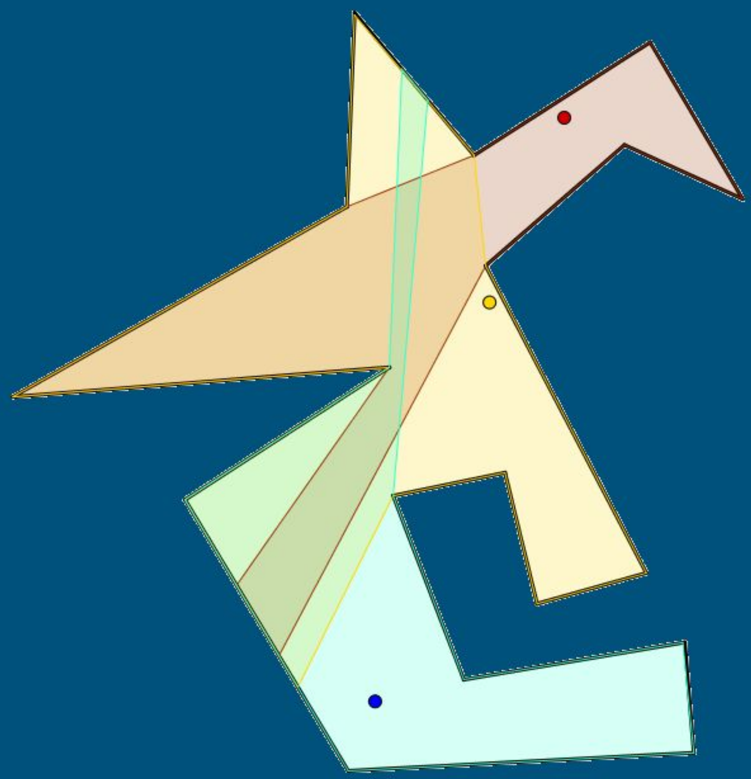
Einfache planare Polygone

Konvexe Polygone $\leftarrow$ ein Wächter reicht

Konkave Polygone $\leftarrow$ □ $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter reichen für ein Museum mit n Ecken



Obere Grenze, aber...



Dieses Museum hat 18 Ecken.

Die obere Grenze liegt bei 18/3 = 6 Wächter

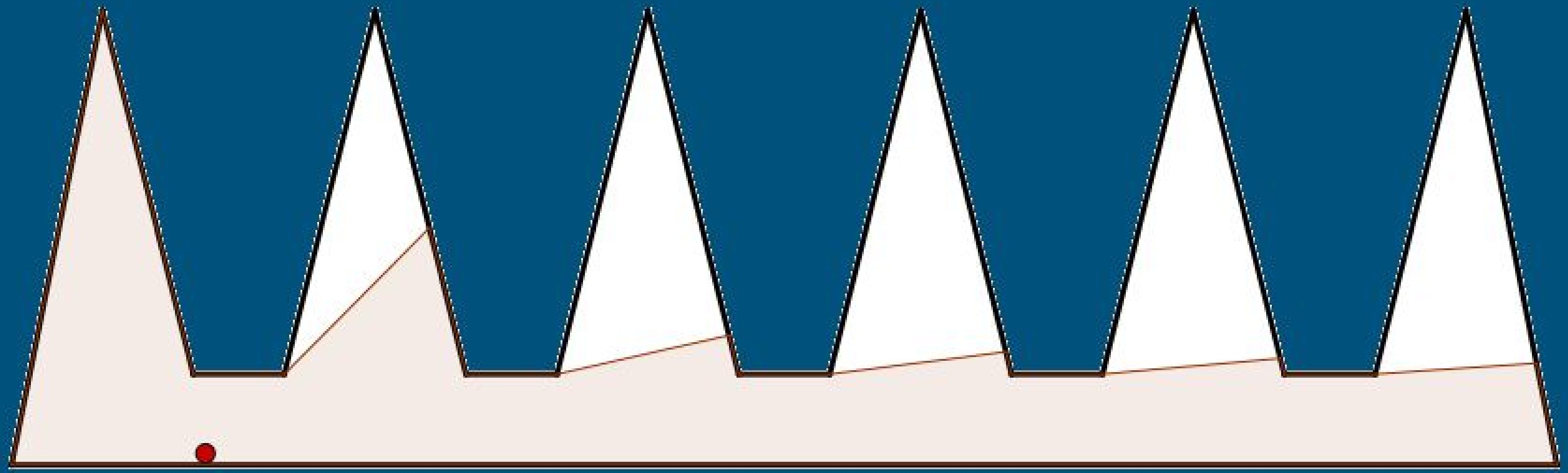
Aber hier genügen immerhin 3 Wächter.

Im schlimmsten Fall...

Dieses Museum hat 18 Ecken.

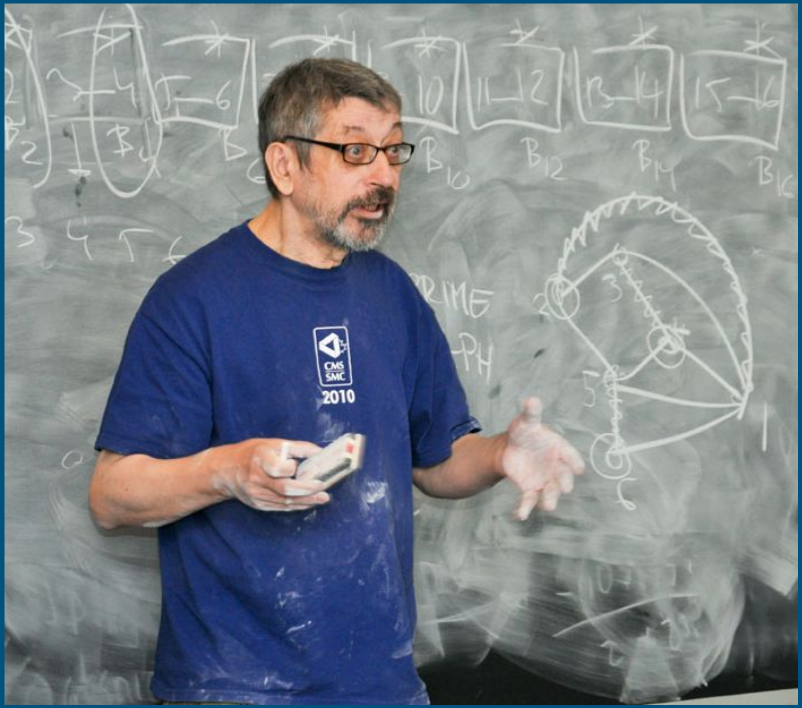
Die obere Grenze liegt bei 18/3 = 6 Wächter,

Und hier ist die Kondition tatsächlich scharf!



Satz von Chvátal: eine obere Abschätzung

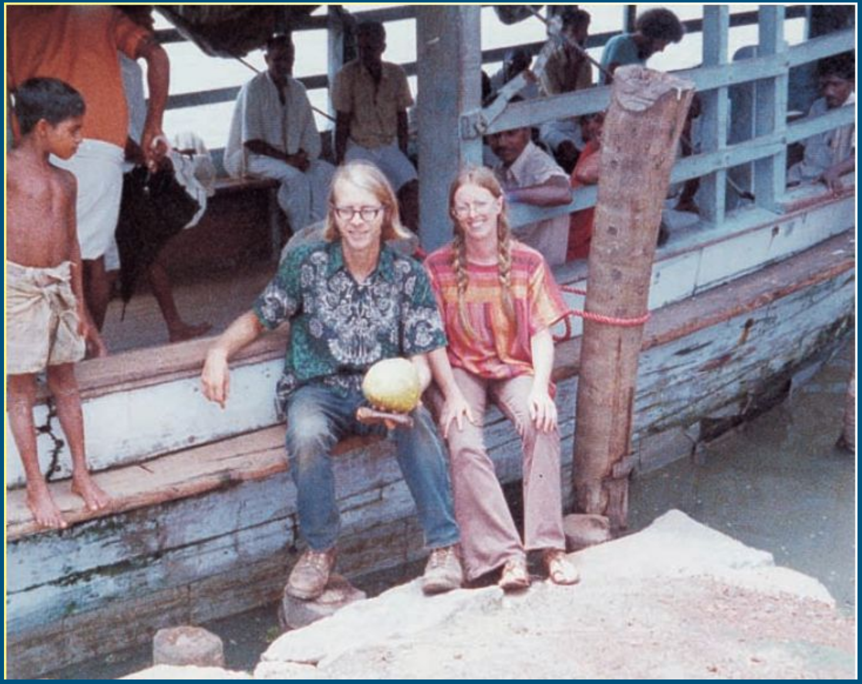
Václav (Vašek) Chvátal hat bewiesen, dass die obere Grenze der Anzahl an Wächter für ein Polygon mit n Ecken $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ist.



Chvátal's Beweis war kompliziert

Václav (Vašek) Chvátal hat bewiesen, dass die obere Grenze der Anzahl an Wächter für ein Polygon mit n Ecken $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ist.

Steve Fisk hat seinen Beweis vereinfacht

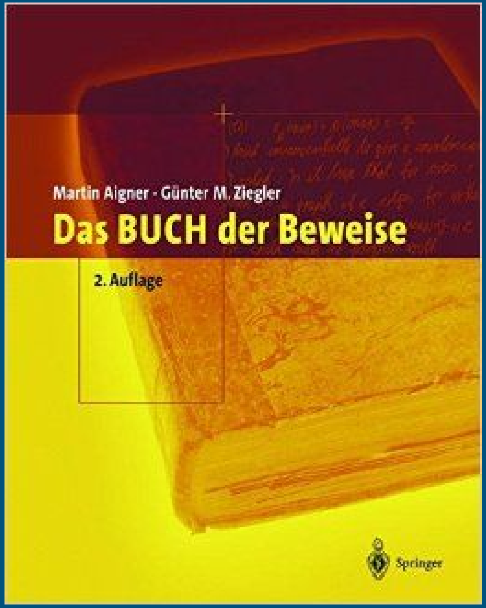


Das Buch der Beweise

Václav (Vašek) Chvátal hat bewiesen, dass die obere Grenze der Anzahl an Wächter für ein Polygon mit n Ecken $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ist.

Steve Fisk hat seinen Beweis vereinfacht…

… und zwar so schön, dass er im Buch der Beweise erscheint.

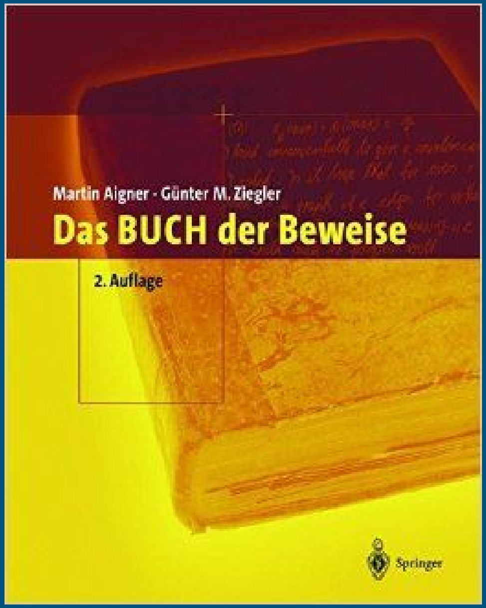


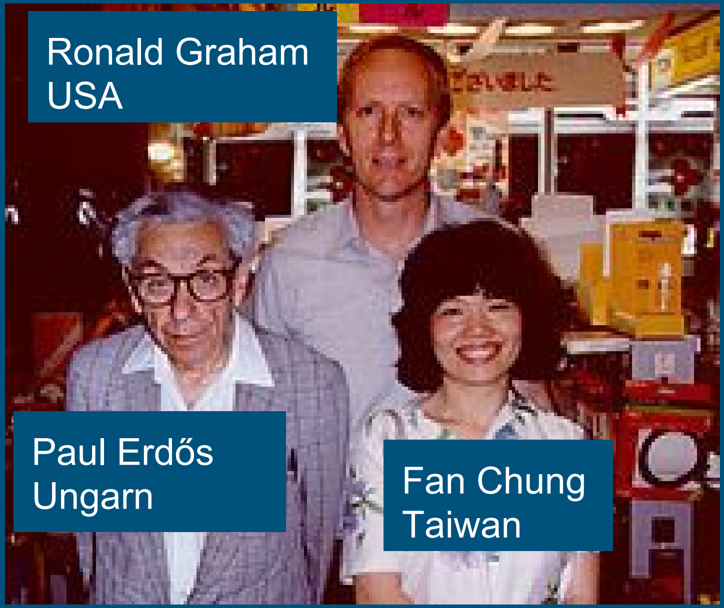
Paul Erdős

Václav (Vašek) Chvátal hat bewiesen, dass die obere Grenze der Anzahl an Wächter für ein Polygon mit n Ecken $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ist.

Steve Fisk hat seinen Beweis vereinfacht…

… und zwar so schön, dass er im Buch der Beweise erscheint.





Zum Beweis von Steve Fisk

Erster Schritt:

Das einfachst-mögliche Museum hat drei Ecken.

Zum Beweis von Steve Fisk

Erster Schritt:

Das einfachst-mögliche Museum hat drei Ecken...

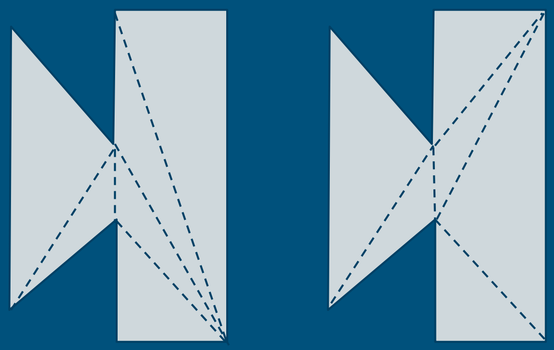
...und braucht nur einen Wächter

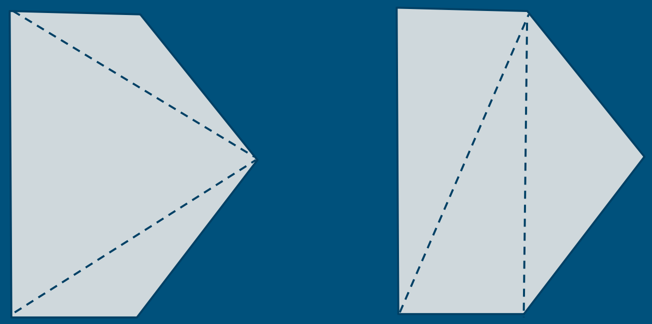
in der Nähe eines der drei Ecken

Zum Beweis von Steve Fisk

Nächster Schritt:

Ein Polygon kann *trianguliert* werden





Hier zum Beispiel:

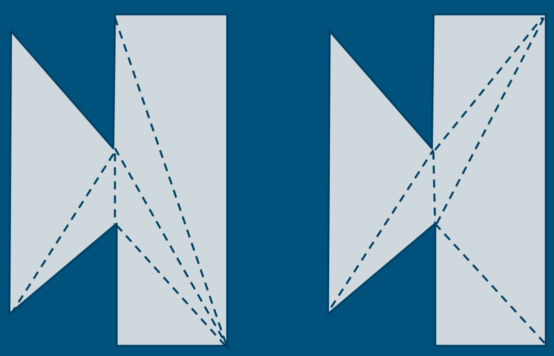
Zwei Museen, je trianguliert auf zwei verschiedene Weise

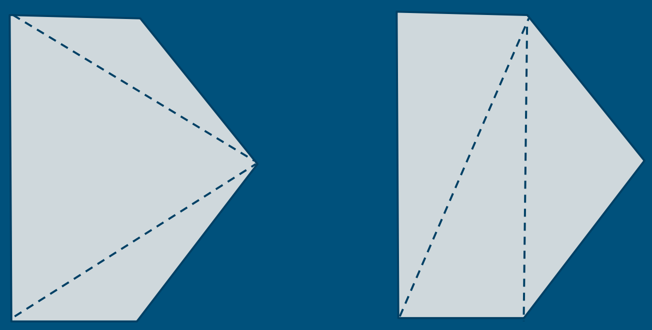
Zum Beweis von Steve Fisk

Ist das sicher?

Nächster Schritt:

Jedes Polygon kann *trianguliert* werden





Zwei Museen, je trianguliert auf zwei verschiedene Weise

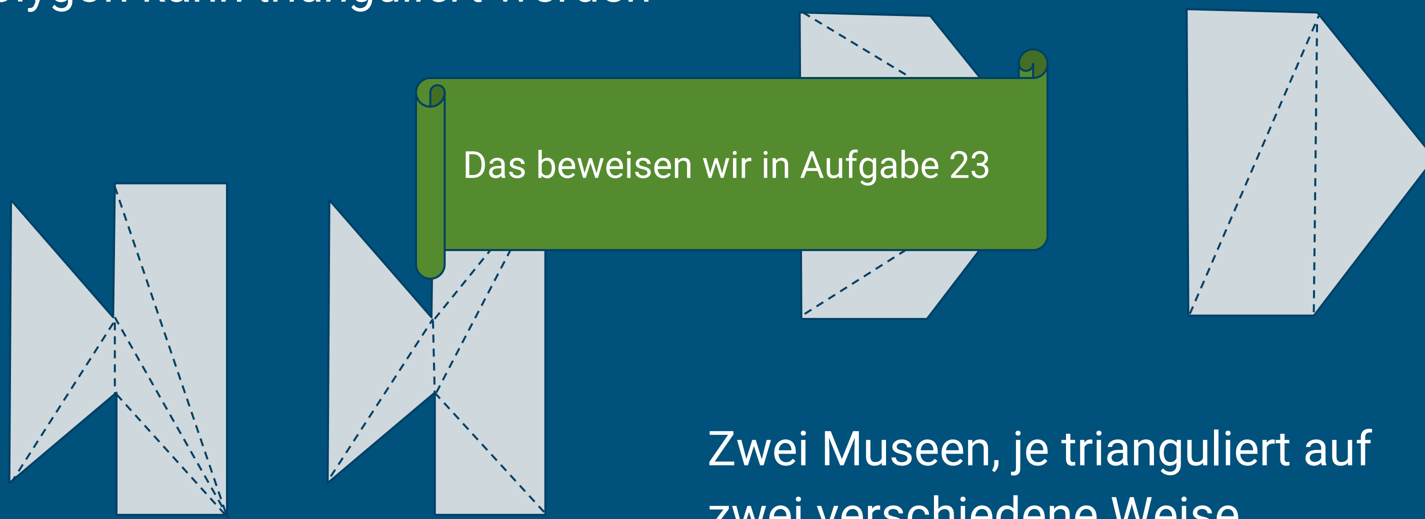
Zum Beweis von Steve Fisk

Ist das sicher?

Nächster Schritt:

Jedes Polygon kann *trianguliert* werden

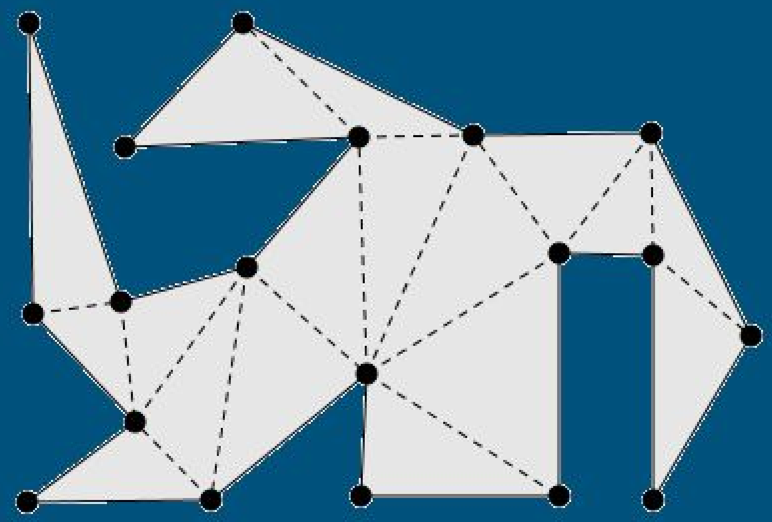
Das beweisen wir in Aufgabe 23

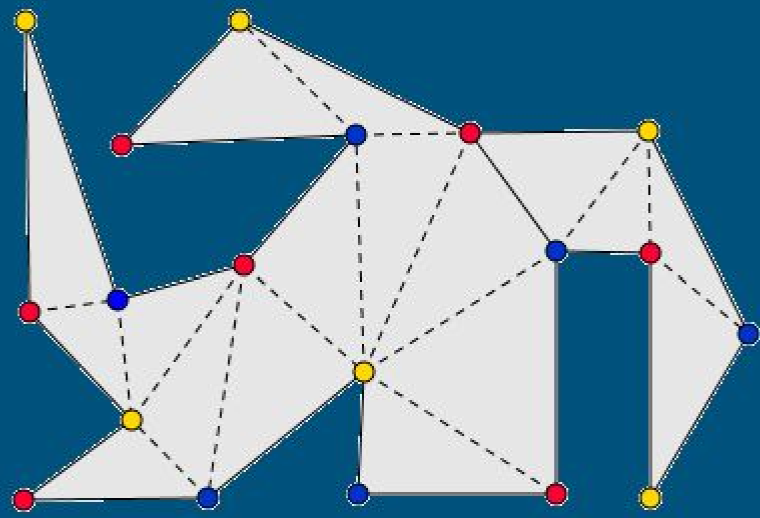


Zwei Museen, je trianguliert auf zwei verschiedene Weise

Zum Beweis von Steve Fisk

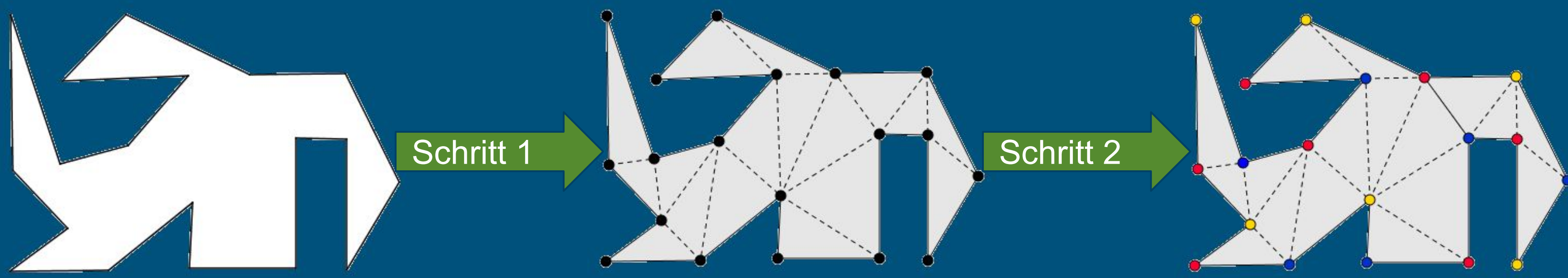
Wir haben ein trianguliertes Polygon. Die Ecken des Polygons können gefärbt werden sodass jedes Eck eine von drei Farben nimmt und je zwei benachbarte Ecken stets unterschiedliche Farbe haben.





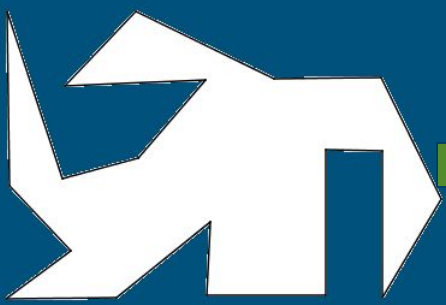
Zum Beweis von Steve Fisk

Ein Polygon mit n Ecken... ...ist triangulierbar... ...und 3-färbbar



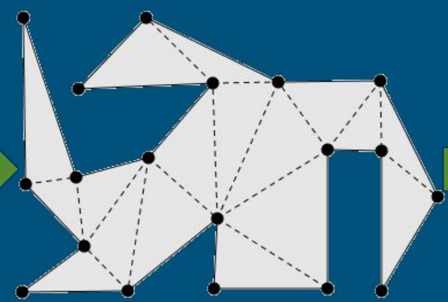
Zum Beweis von Steve Fisk

Ein Polygon mit n Ecken...



Schritt 1

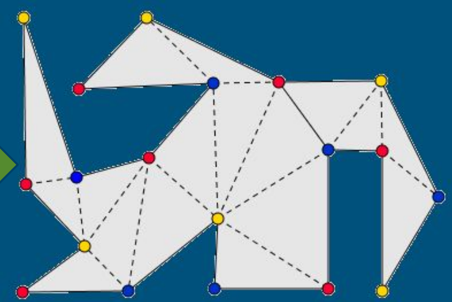
...ist triangulierbar...



Beweis in Aufgabe 23

Schritt 2

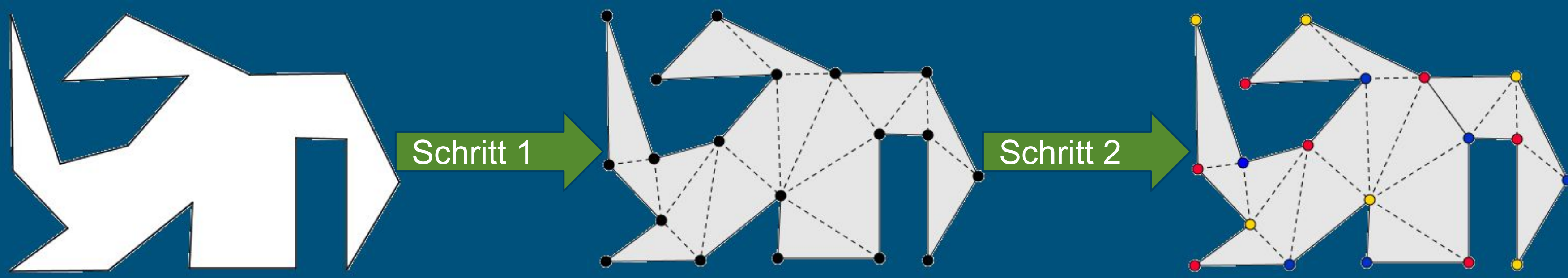
...und 3-färbbar



Beweis in Aufgabe 24

Zum Beweis von Steve Fisk

Ein Polygon mit n Ecken... ...ist triangulierbar... ...und 3-färbbar

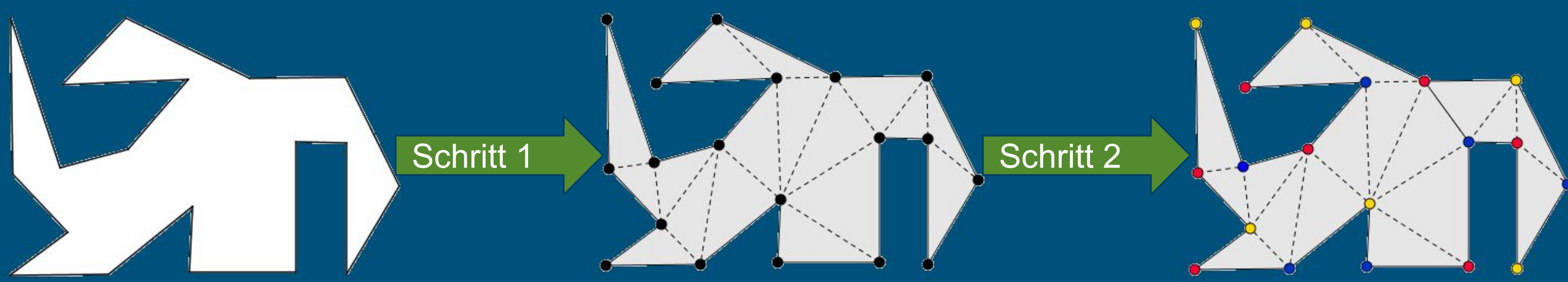


Setze die Wächter nah zu den Ecken in der Farbe, die am seltensten vorkommt.

Die Anzahl dieser Ecken wird kleiner oder gleich $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ sein.

Zum Beweis von Steve Fisk

Ein Polygon mit n Ecken... ...ist triangulierbar... ...und 3-färbbar



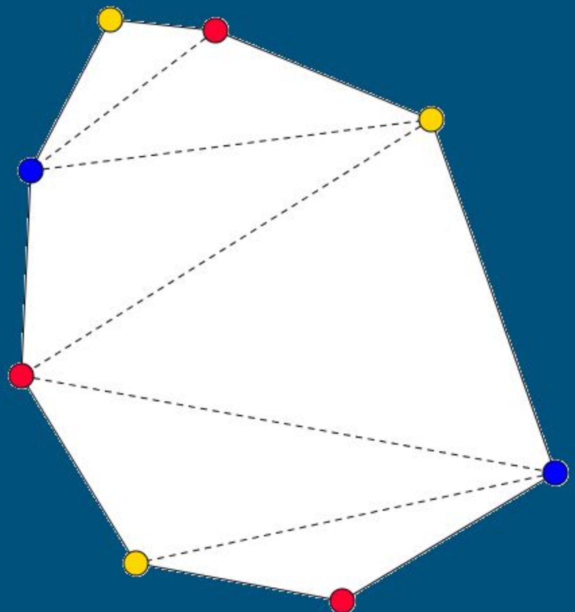
Setze die Wächter bei den Ecken in der Farbe, die am seltensten vorkommt.

Die Anzahl dieser Ecken wird kleiner oder gleich $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ sein.

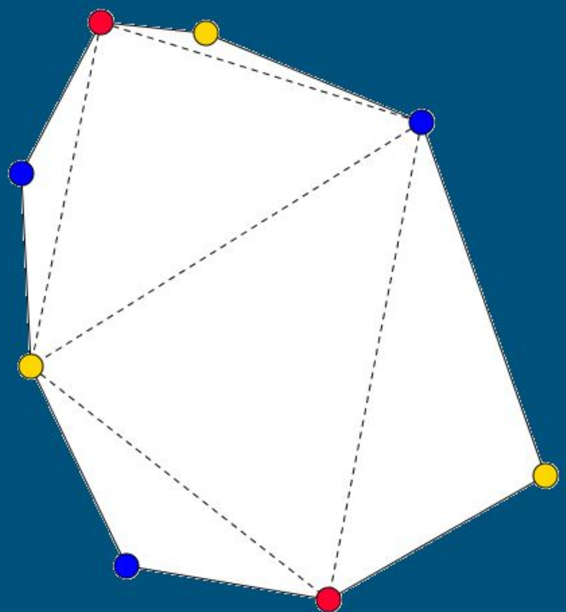
Beweis in Aufgabe 18

Funktioniert das in konvexen Polygonen?

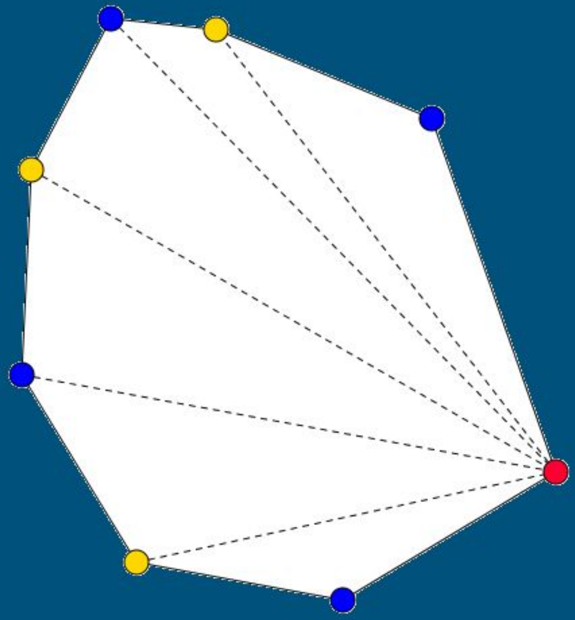
Gut,



besser,



am Besten



Aufwärmung und Gruppenarbeit

Teil II. um Ideen zu stabilisieren

Teil III. um neue Ideen zu entwickeln

→ Hier bitte unbedingt, die Aufgabe 18. machen

Teil IV. erhält weitere Herausforderungen, die teilweise in Gruppenarbeit gemacht werden sollten.

Definitionen und ein Satz zum Teil IV.

Definition. Sei P ein einfaches Polygon.
Eine *Diagonale* ist ein offenes Liniensegment, das zwei Eckpunkte von P verbindet und vollständig in P liegt.

Definition. Sei P ein einfaches Polygon.
Eine Zerlegung von P in Dreiecke durch Diagonalen heißt *Triangulierung* von P.

Da wir Triangulierungen bestimmen wollen, ist es günstig ihre Existenz zu zeigen und zu berechnen aus wievielen Dreiecken sie besteht.

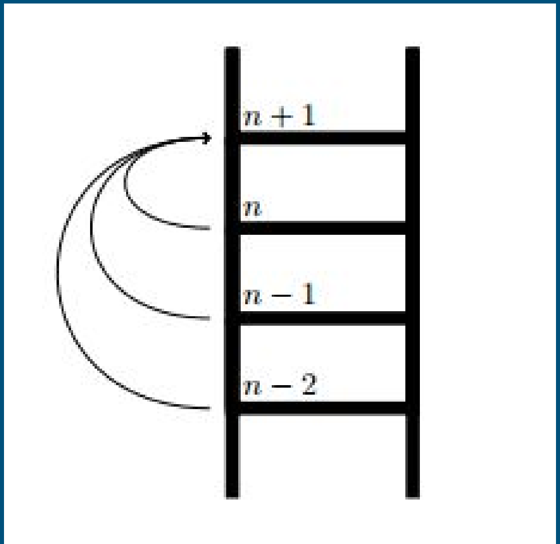
Satz. Jedes einfache Polygon gestattet eine Triangulierung und jede Triangulierung eines einfachen Polygons mit n Ecken besteht aus genau $n-2$ Dreiecken.

Allgemeine (starke) Induktion

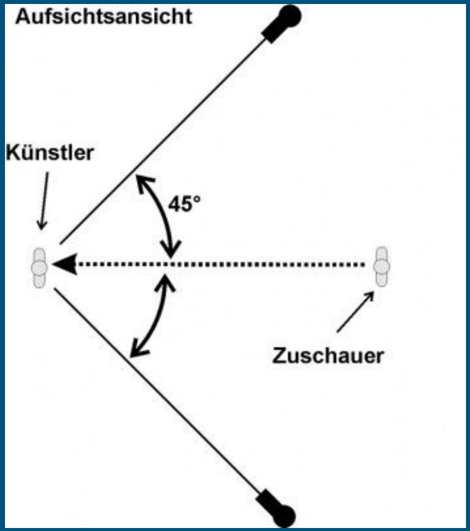
Es sei eine Aussage A zu beweisen, die von der natürlichen Zahl n abhängt, also A(n).

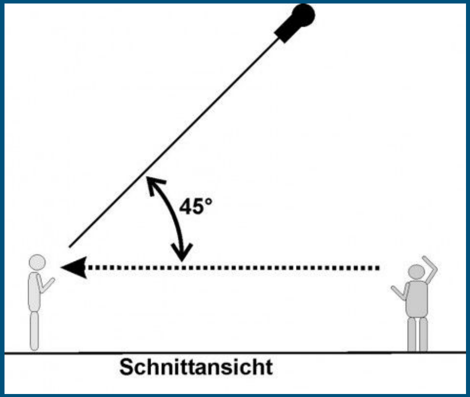
1. Induktionsverankerung/Induktionsanfang: Zu zeigen ist, dass A(n_0) gilt.

2. Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage A(k) für alle $k \in \{n_0, \ldots, n\}$ gilt. Zu zeigen ist, dass auch A($n + 1$) richtig ist.

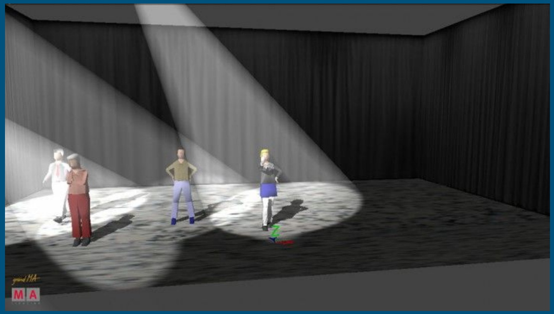


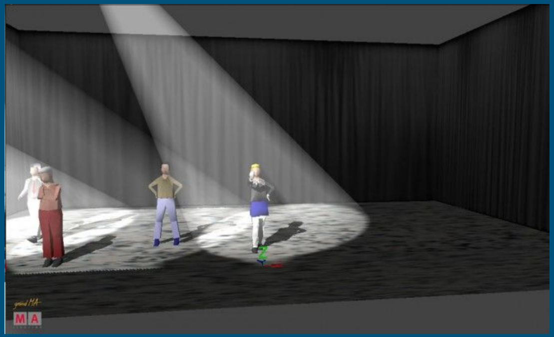
Bühnenbeleuchtung





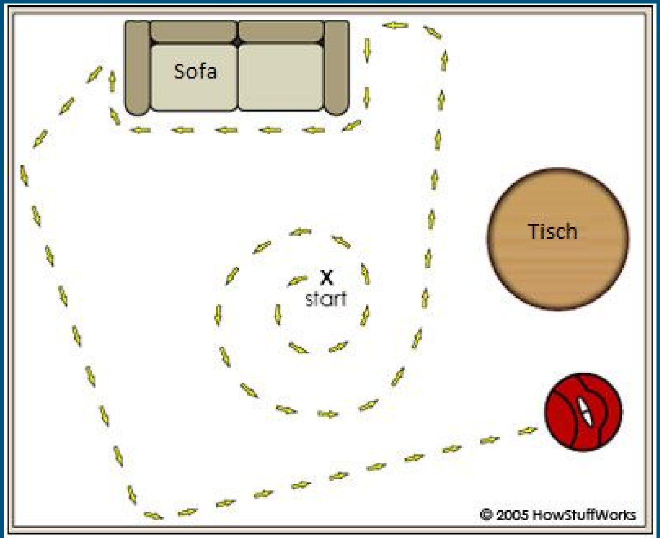
Hier gibt es viel mehr zu beachten als nur die ganze Fläche mit Licht zu fluten.





Illustrationen: Herbert Bernstädt

Staubsaugerroboter



Bedeckungsproblem

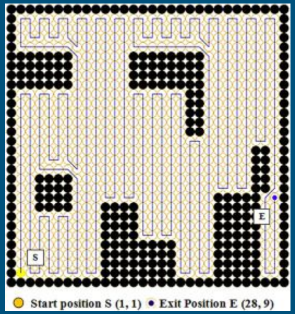
Ameisenalgorithmus (bug algorithm)

In der einfachsten Form wurde das Problem schon von Bauern gelöst:

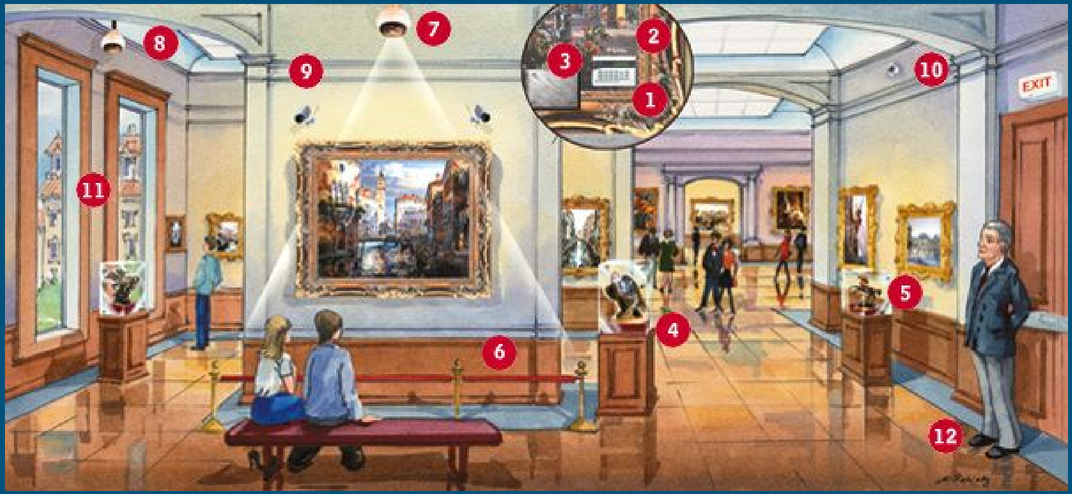
Bedeckende Spannbaum-Algorithmen (spanning tree covering)

Evolutionäre Algorithmen (stochastische metaheuristische Optimierungsverfahren)

Künstliche Intelligenz



Überwachungstechniken in Museen



1. Vibrationssensoren
2. Inventarnummer
3. Haken zum Aufhängen
4. Glaskasten
5. Umwelt-Sensoren
6. Riegelzäune
7. Bewegungssensoren mit Alarm
8. Bewegungssensoren ohne Alarm
9. Überwachungskameras
10. Brandmeldeanlage und Temperaturmessgeräte
11. Alarmfenster
12. Museumswächter

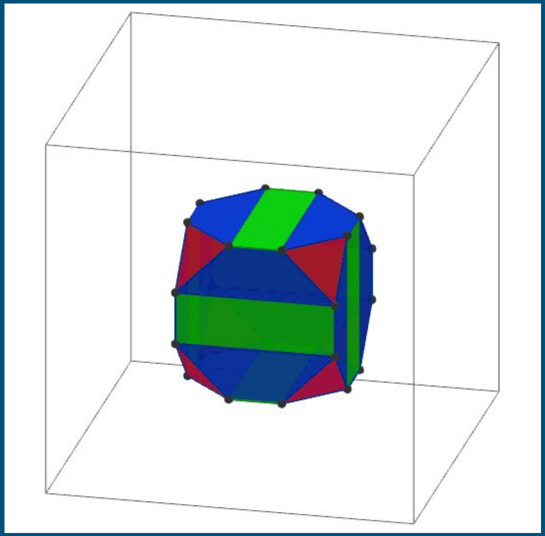
Neue Ideen

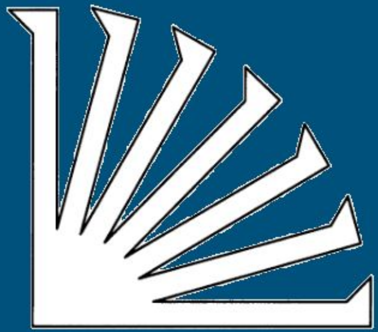
Was wenn das Polygon Löcher hat?

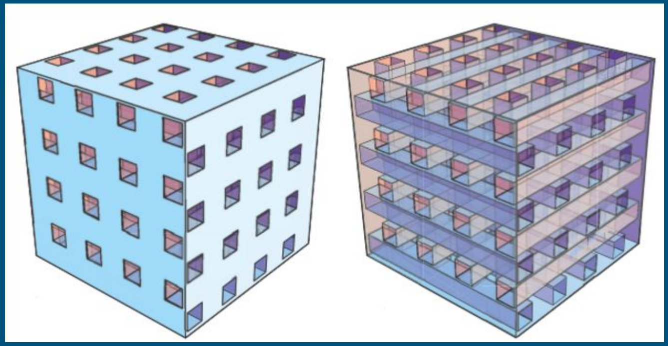
Was wenn es sich um ein Gefängnis handelt und wir es von außen beobachten müssen?

Was wenn jeder Wächter sich stets entlang einer Wand bewegt und dabei von jedem Punkt der Wand aus sich umschauen kann?

Was passiert in drei Dimensionen?







Vielen Dank für die Zusammenarbeit!

Literatur

Aigner & Ziegler (2010). Das Buch der Beweise. Springer Verlag.

Burger & Starbird (2010). The Heart of Mathematics: An invitation to effective thinking. Wiley & Sons.

Seminarmanuskripte (im Internet abrufbar) zum Thema “Art Gallery Problem” bzw. “Museumswächter” von Washington University, Universität Münster, TU München und HU Berlin.