Mit Differentialgleichungen ins schwarze Loch

Martin Schwalsberger

Schülerseminar

15.03.2019

Overview

Vorführung

Physikalische Funktionen

Funktionen beschreiben oft zeitabhängige physikalische Größen, zB:

- Distanz, Geschwindigkeit, Beschleunigung
- Temperaturverlauf
- Füllstand eines Behälters
- Masse eines radioaktiven Materials
- Orbit eines Licht-/Masse-Teilchen
- Verteilung des Gehirninnendruck
- ...

Differenzieren

Berechnen der momentanen Änderung einer Funktion

- Distanz $\xrightarrow{\textit{Ableitung}}$ Geschwindigkeit
- Geschwindigkeit $\xrightarrow{\textit{Ableitung}}$ Beschleunigung
- Füllstand $\xrightarrow{\textit{Ableitung}}$ Ausflussrate
- Radioaktive Masse $\xrightarrow{\textit{Ableitung}}$ Zerfallsrate

Wie berechnet man diese?

Bsp. Geschwindigkeit

Fahrrad fährt mit konstanter Geschwindigkeit Strecke s in Zeit T

$$v = \frac{s}{T}.$$

Fahrrad ist zum Zeitpunkt t am Ort $s(t)$, was ist die Geschwindigkeit $v(t)$?

$\Rightarrow$ Annahme: Geschwindigkeit über kurzes Zeitinterval $[t, t + \Delta t]$ fast konstant

$$v(t) \approx \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Fehler werden für kleineres Zeitinterval kleiner, Grenzwertbildung

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} =: s'(t)$$

Definition der Ableitung

Visualisiert

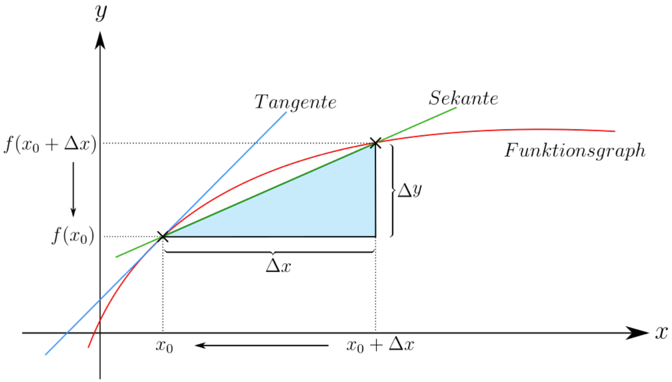


Abbildung:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Differencial_quotient_of_a_function.svg

Grundlagen Differenzieren

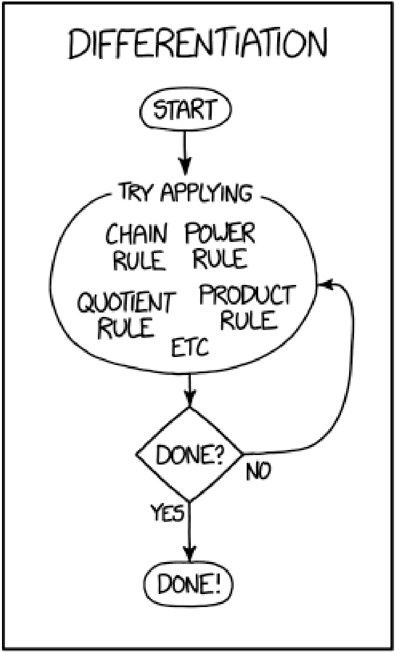
Regeln zum Differenzieren

- $(u(t) + v(t))' = u'(t) + v'(t)$
- $(u(v(t)))' = u'(v(t))v'(t)$
- $(u(t) * v(t))' = u'(t) * v(t) + u(t) * v'(t)$

Polynome:

- $(x^n)' = n * x^{n-1}$
- $(\underbrace{4x^9}_{4*9x^8} + \underbrace{x^5}_{5x^4} + \underbrace{8x}_{8*1x^0=8} + \underbrace{42}_{0})' = 36x^8 + 5x^4 + 8$

Systematische, algorithmische Anwendung


DIFFERENTIATION
START
TRY APPLYING
CHAIN RULE
POWER RULE
QUOTIENT RULE
PRODUCT RULE
ETC
DONE?
NO
YES
DONE!

Wichtige Eigenschaft

$$(e^x)' = e^x$$

Hilfreich wenn direkter Bezug zwischen Ableitung und Funktion besteht.

Übungsblatt I

Natürliche Zusammenhänge

Oft ist etwas über die Ableitung eines Zustands bekannt:

- Temperatur eines Körpers: $T'(t) = \kappa(T_{Umgebung} - T(t))$
- Gedämpfte Schwingung: $u''(t) + \underbrace{d * u'(t)}_{Dämpfung} + \underbrace{k * u(t)}_{Federkraft} = 0$
- Freier Fall: $h''(t) = g$

Physikalische Modelle verwenden sehr oft Ableitungen.

Differenzialgleichungen

Lösen von Differentialgleichungen

Gibt es eine Umkehrung zum Differenzieren?
Ja, das Integral! Ermöglicht Differenzialgleichungen zu lösen:

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= F(t) \\
u(t) = \int_0^t u'(s)ds + C &= \int_0^t F(s)ds + C
\end{aligned}
$$

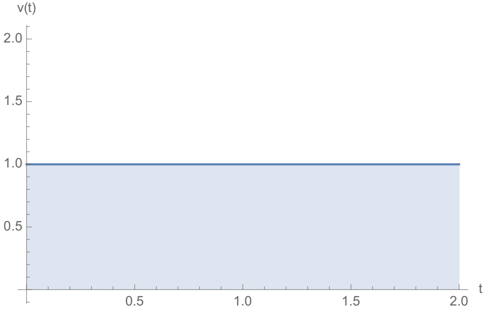
Differenzieren verschluckt Konstanten, C muss durch Anfangszustand (z.B. $u(0) = 1$) wieder bestimmt werden:

$$1 = u(0) = \underbrace{\int_0^0 F(s)ds}_{=0} + C = C$$

Integrieren

Wir wissen bereits $v(t) = s(t)$ wie berechnet man $s(t)$ anhand von $v(t)$?
Konstante Geschwindigkeit:

$$s = v * t$$



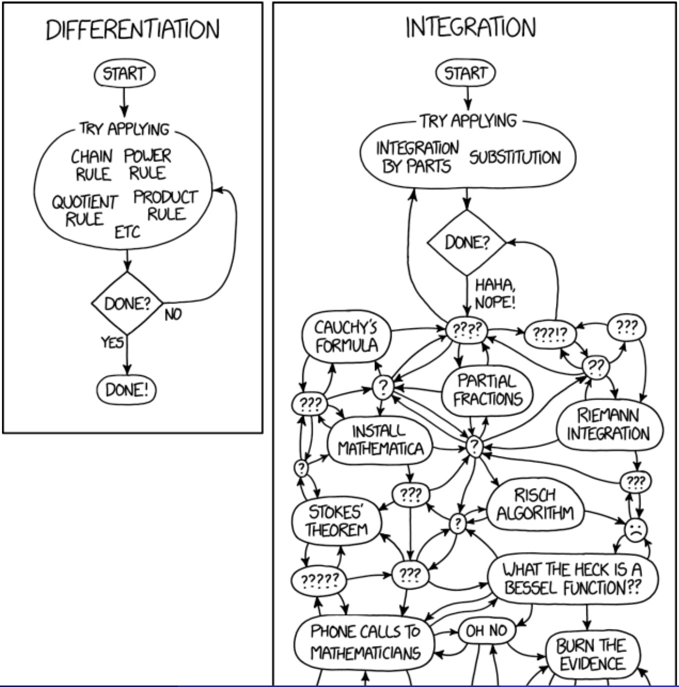
Integrieren ist also die Fläche unter der Funktion zu berechnen.

Analytisches Integrieren

Techniken zum analytischen Integrieren:

- Integrationstabellen
- Partielle Integration (Gegenstück zur Produktregel)
- Substitution (Gegenstück zur Kettenregel)
- Algebraprogramme

Können wir jetzt problemlos integrieren?


DIFFERENTIATION
START
TRY APPLYING
CHAIN RULE
POWER RULE
QUOTIENT RULE
PRODUCT RULE
ETC
DONE?
NO
YES
DONE!
INTEGRATION
START
TRY APPLYING
INTEGRATION BY PARTS
SUBSTITUTION
DONE?
HAHA, NOPE!
CAUCHY'S FORMULA
????
???!?
???
??
PARTIAL FRACTIONS
?
???
INSTALL MATHEMATICA
RIEMANN INTEGRATION
?
?
???
???
STOKES' THEOREM
RISCH ALGORITHM
?
☹
?????
???
WHAT THE HECK IS A BESSEL FUNCTION??
PHONE CALLS TO MATHEMATICIANS
OH NO
BURN THE EVIDENCE

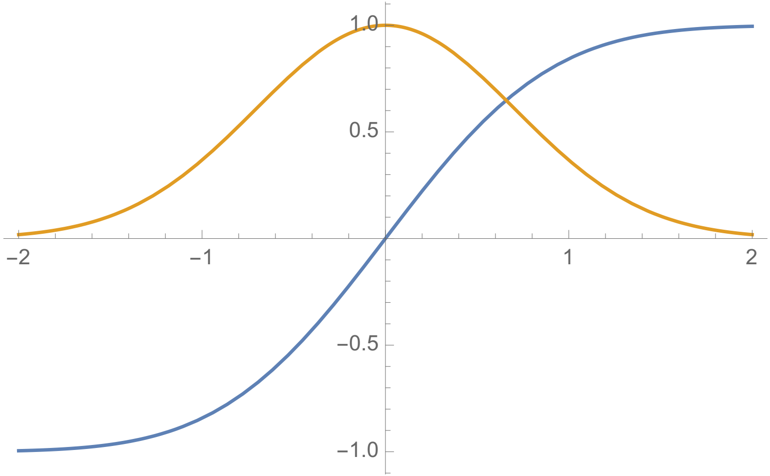
Probleme beim Integrieren

- Die richtige Substitution muss man erraten.
- Partielle Integration kann ins Leere laufen.
- Manche Lösungen sind sehr kompliziert.
- Manche Integrale lassen sich nicht anschreiben.
  Lösung: Definiere neue Funktion als Integral

$\Longrightarrow$ Kein Übungszettel

Bsp.

Beispiel einer nicht analytisch integrierbaren Funktion:



Lösen von Differnzialgleichungen II

Versuchen Differenzialgleichung zu lösen:

$$u'(t) = u(t)$$
$$u(t) = \int_0^t u(s)ds + C = ?$$

Problem: Unbekannte steckt in der Lösung!
Analytische Lösungsmethoden für dieses Problem:

- e^{at} Ansatz (Lösung erraten)
- Laplace Transformation (besserer e^{at} Ansatz)
- Trennung der Variablen
- Picard-Iteration

Picard-Iteration

Problem:

$$\begin{aligned} u'(t) &= F(t, u(t)) \quad (z.B.\ 4u(t) + t^2) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

Definiere Folge von Lösungen:

$$\begin{aligned} u^0(t) &= u_0 \\ u^{k+1}(t) &= u_0 + \int_0^t F(s, u^k(s))ds \end{aligned}$$

$u^k(t)$ nähern sich immer weiter der Lösung an.

Picard-Iteration Fazit

Vorteile:

- Analytische Lösung
- Iteration lässt sich vielleicht durch Induktion auflösen $\rightarrow$ exakte Lösung
- Manchmal nur Polynome zu integrieren (einfach)

Nachteile:

- Analytisches Integrieren
  - Schwer, verworren, nicht immer möglich
  - Langsam für Computer (muss genauso herumprobieren)
- Instabil für großes t

Numerische Verfahren

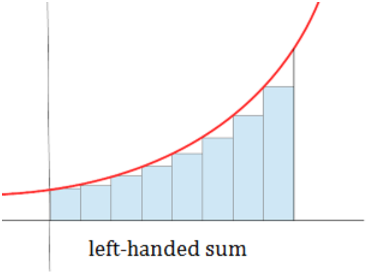
Meist interessiert man sich für die Funktion in einzelnen Punkten, z.B. Zustand nach $100s \implies$ Keine analytische Lösung notwendig!

Reale Daten haben immer (Mess-)Fehler
$\implies$ Verfahrensfehler muss nur kleiner sein.

Computer sind <u>extrem</u> schnell mit normalen Rechenoperationen
$\implies$ Versuchen damit auszukommen.

Numerisches Integrieren

Versuch Fläche unter der Kurve anzunähern:



$$u(\Delta t) = u(0) + \int_0^{\Delta t} u(s) ds \approx u(0) + \Delta t * u(0)$$

Gute Näherung für kleines Δt, wiederholbar.
$\rightarrow$ Euler-Verfahren

Euler-Verfahren im Einsatz

Katherine Johnson verwendete das händische Euler-Verfahren um die orbitale Flugbahn eines Astronauten zu berechnen.

Übungsblatt III

Numerisches Lösen

Lichtstrahlen beim schwarzen Loche

Modellierung:

- Characterisierung der Raumzeit über Maß für Fortbewegung von Teilchen ($h(r) := 1 - R/r$)

$$h(r)dt \otimes dt + \frac{1}{h(r)} dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + cos^2(\theta) d\phi \otimes d\phi)$$

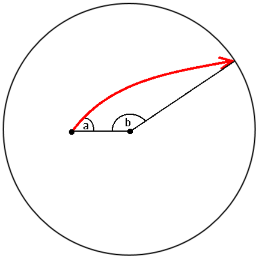
- Lichtteilchen bewegen sich entlang Vektoren mit Länge 0.
- Differenzialgleichungen leiten sich aus Energiegleichungen her
- Vereinfachte Differenzialgleichung:

$$u''(\phi) + u(\phi) = \frac{3R}{2} u^2(\phi)$$

(r, ϕ) sind Polarkoordinaten. $u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}$, also beschreibt diese Gleichung die Bewegung in der Ebene

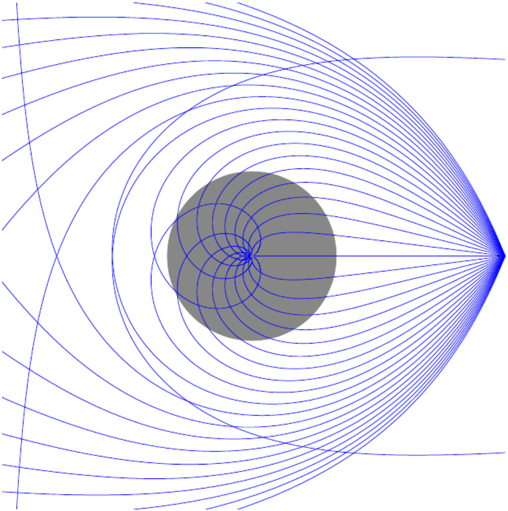
Lichtstrahlen beim schwarzen Loch

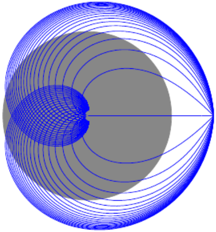
Der Hintergrund wird als große Kugel modelliert, also welchen Punkt der Kugel sieht man in einer Richtung?



Betrachte ebenes Problem, welchen Winkel legt ein Lichtstrahl zurück?
Startbedingungen $u(0), u'(0)$ aus Position des Beobachters und Blickrichtung

Verhalten von Lichtstrahlen





Bemerkenswertes zu Schwarzen Löchern

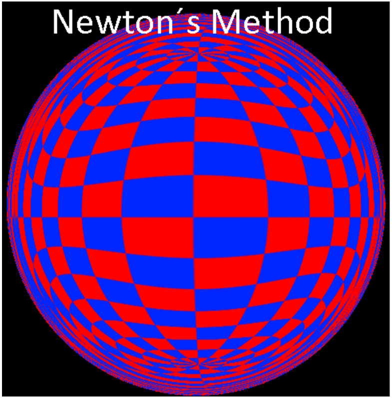
- R ist der Schwarzschildradius eines schwarzen Loches. Alles was ihn unterschreitet, endet in der Singularität.
- Der Radius r hat nichts mit einem physikalischen Abstand zu tun.
- Lichtstrahlen werden rotverschoben, wenn sie sich vom schwarzen Loch entfernen.

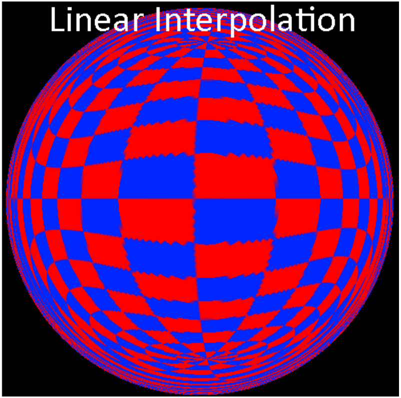
Übungsblatt IV

Lichtstrahlen

Auflösung Schnittpunkt finden

Lösung mittels Newton Verfahren, da Ableitung durch Runge Kutta bekannt. Funktionsauswertung durch Runge Kutta Schritt.





Bildquellen

- https://xkcd.com/2117/
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Picard_iteration.gif
- http://www.quixquax.at/bleichling_php/pdf-lectures/vl-schwarzschild.pdf

Danke fürs Mitmachen!