Übungsblatt 1 Differenzieren

Regeln zum Differenzieren:
Linear: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
Produktregel: $(f(x)*g(x))' = f'(x)*g(x)+f(x)*g'(x)$
Polynome: $(x^n)' = n*x^{n-1} \quad n \in \mathbb{R}$

1. Bekanntermaßen gilt $(e^x)' = e^x$, leite anhand der Kettenregel $(e^{a*x})'$ her.
Hinweis: Betrachte $e^{a*x} = e^{f(x)}$, wobei $f(x) = a*x$.

2. Quer durch den Gemüsegarten
Differenziere die folgenden Funktionen:

$$x^{123456} + 7x^3 + 2x^2 + 9$$
$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$
$$e^{x^2+5}$$

Differenziere jeweils mittels Ausmultiplizieren, Produktregel, Kettenregel:

$$(3-x)^2$$

Hinweis $(3-x)^2 = (3-x)(3-x) = f(x)^2$

3. Exponentialreihe
e^x lässt sich auch als ein "unendliches" Polynom anschreiben:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}...$$

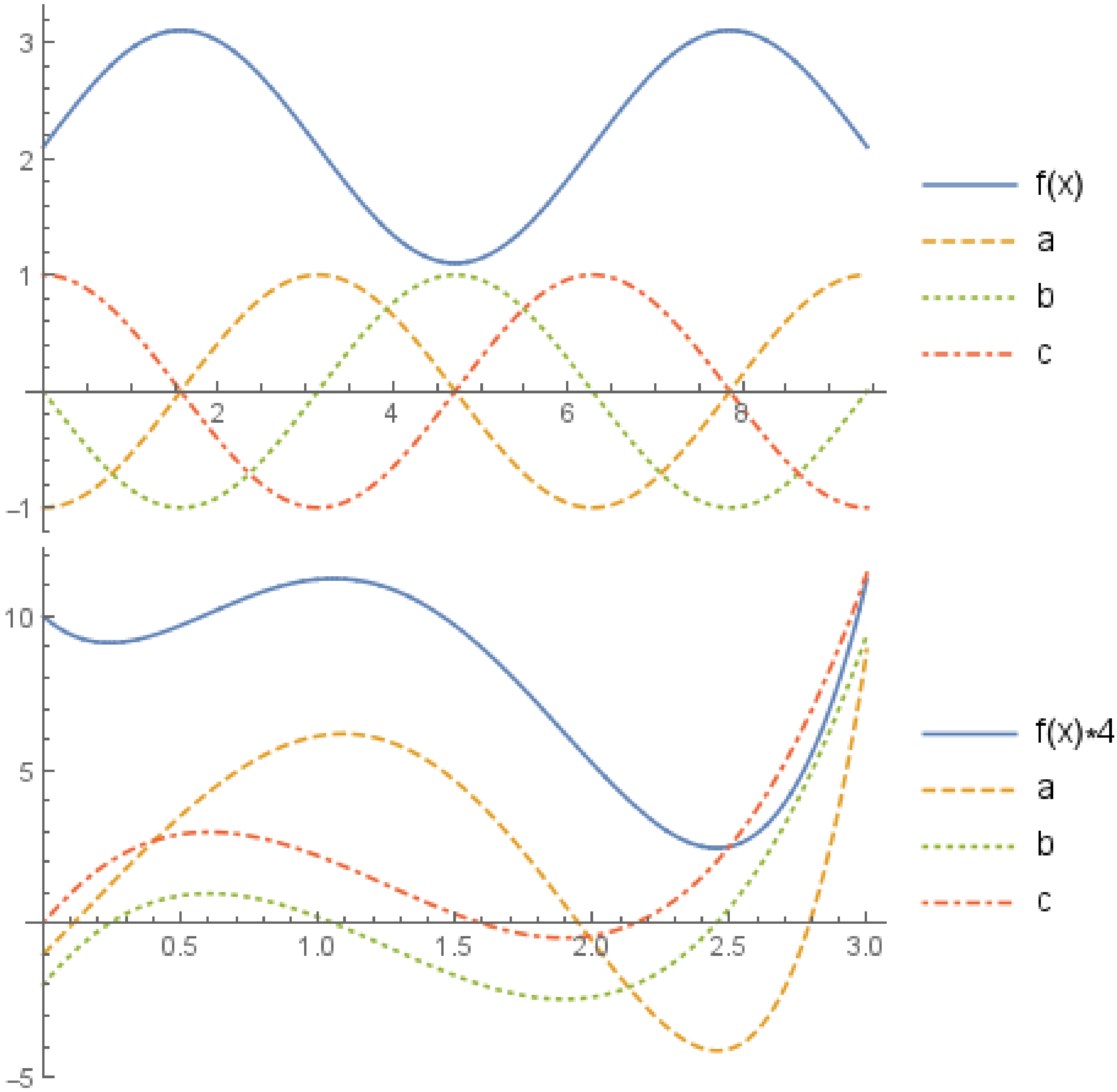
Dabei ist $i! = \prod_{k=1}^{i} k = 1*2*3*....*i$.
Differenziere die unendliche Summe gliedweise und vereinfache das Ergebnis.

4. Physikalischer Quatsch
Die Saturn V Rakete startet von der Startplatform und ist zum Zeitpunkt $t \in [0,6]$ (in Sekunden) in der Höhe von $h(t)$ Meter.

$$h(t) = (20x - 5x^2 + 0.5x^3)m$$

Flog Neil Armstrong im angegebenen Zeitraum zeitweise schneller als 60 km/h?
Welche Punkte sind an diesem Textbeispiel mangelhaft?

5.
Bestimme ob jeweils die Funktion a, b oder c die Ableitung der gegebenen Funktion ist.



Hinweis: Wenn die Funktion steigt, ist die Ableitung positiv, und umgekehrt.

Übungsblatt 2 Differenzialgleichungen

1. Modellbildung

Versuche für die folgenden Modelle einfache Differenzialgleichungen zu finden. Gib eine Gleichung der Form $u'(t) = ...$ an. Hilfreiche Fragestellungen hierfür:

- Wie ändert sich der Zustand ($\rightarrow$ Ableitung) in Abhängigkeit vom momentanen Zustand?
- Sinkt oder steigt der Wert.
- Für einen unbekannten positiven Faktor schreib einfach ein C hin.
- Nicht überkompliziert denken.

a) Eine Masse an radioaktiven Teilchen zerfällt gleichmäßig. Die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Teilchen zu zerfallen hängt nicht von anderen Teilchen ab (Hinweis: Also hängt die Zerfallsrate nur von der gesamten Masse ab).

b) Eine Bakterienpopulation verfügt über unbegrenzte Nahrung und wächst.
Ein Bakterium kann sich einmal in der Stunde teilen.
Bonus: Bestimme die Konstante in der Gleichung.

c) Hungrige Zombies haben es auf eine große Schülerherde abgesehen. Je größer die Herde, desto besser können sich die Schüler wehren, sodass weniger von Zombies gefressen werden. Zudem ist jeder Schüler gleichermaßen in Gefahr jederzeit auf einer Bananenschale auszurutschen und tödlich zu verunglücken.

2. Modellbildung zweiter Ordnung

Versuche für folgende Bewegungszustände Differenzialgleichungen zweiter Ordnung aufzustellen. Gehe dabei wie folgt vor:

- Betrachte die Geschwindigkeit $v(t)$ anstelle der Strecke $s(t)$ oder Höhe $h(t)$.
- Wie ändert sich $v(t)$ (möglicherweise in Abhängigkeit von $s(t)$), also welche Beschleunigung liegt vor?
- Setze ein $v(t) = s'(t)$.

a) Ein Objekt fällt im Vacuum, wobei immer die gleiche Schwerkraft darauf wirkt.

b) Ein Objekt fällt in der Athmossphäre bei homogener Schwerkraft. Der Luftwiderstand bremst den Fall und verhält sich wie v^2.

c) Ein Objekt fällt aus dem Weltall auf die Erde. Die Formel für die zeitabhängige Gravitationskraft lautet $\frac{C}{h(t)^2}$ (genauer $G\frac{m_1 m_2}{r^2}$)

3. Lösungen erraten

Errate mittelhilfe der Exponentialfunktion ($(e^{ax})' = ae^{ax}$) und Polynomen Lösungen für die Beispiele 1a, 1b, 2a.

Übungsblatt 3 Numerisches Lösen

Definitionen

k (z.B. u^k) ist hier immer ein Iterationsindex und keine Potenz (erste Näherung, zweite Näherung...)!

Picard Iteration für $u'(t) = u(t)$:

$$u^0(t) = u_0$$
$$u^{k+1}(t) = u_0 + \int_0^t u^k(s)ds$$

Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} u_k \approx& u(k * \Delta t) \\ u_{k+1} =& u_k + \Delta t * u_k \approx u_k + \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} u(s)ds \end{aligned}$$

Runge Kutta 4 Verfahren (RK4, komplexeres Euler Verfahren) für $u'(t) = u(t)$. Unterteilt in Hauptiteration (u_k) und eine Subiteration ($\tilde{u}_i$)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= u_k \\ \tilde{u}_2 &= u_k + \frac{\Delta t}{2}\tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_3 &= u_k + \frac{\Delta t}{2}\tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_4 &= u_k + \Delta t * \tilde{u}_3 \\ u_{k+1} &= u_k + \Delta t\frac{1}{6}(\tilde{u}_1 + 2\tilde{u}_2 + 2\tilde{u}_3 + \tilde{u}_4) \end{aligned}$$

Für andere Differenzialgleichungen muss man in der Berechnung der Integrals natürlich etwas anderes einsetzen.

1. Fehlerberechnung

Wir interessieren uns für den Fehler $|u(1) - \hat{u}(1)|$ ($\hat{u}$ Näherungslösung) für die Testgleichung

$$u'(t) = u(t)$$
$$u(0) = 1$$

Berechne jeweils den Fehler $|e - \hat{u}(1)|$ für:

- $1, 2, 4$ Iterationen der Picard Iteration.
- $1, 2, 4$ Schritten des Eulerverfahrens ($\Delta t = \frac{1}{Schritte}$).
- Einen Schritt des RK4 Verfahrens.

2. Fehlervergleich

- Vergleiche die verschiedenen Verfahren miteinander. Wo stimmen sie überein? Welche liefern bessere Ergebnisse für vergleichbaren Aufwand?
- Untersuche um welchen Faktor sich der Fehler verkleinert wenn man mehr Iterationen/Schritte verwendet.
- Überlege ungefähr welche und wieviele Operationen man jeweils zur Berechnung von $\hat{u}(1)$ braucht.

3. Stabilität Integrieren vs. Differenzieren

Wir wissen, dass exaktes Integrieren viel schwieriger als Differenzieren ist. Aber wie wirkt sich das auf Datenfehler aus?
Stabilität: *Ein kleiner Fehler in den Daten wird nicht beliebig verstärkt.*
Gegeben sei eine Funktion und eine gestörte Variante:

$$f(t) := \cos(t)$$
$$f^{\delta}(t) := \cos(t) + \delta \cos(t * n)$$

Berechne wie Integrieren oder Differenzieren den Fehler verändert, also

$$\max_{0 \le t \le 3} \frac{|f'(t) - (f^{\delta}(t))'|}{|f(t) - f^{\delta}(t)|} = ?$$
$$\max_{0 \le t \le 3} \frac{|\int_0^t f(s) - f^{\delta}(s) ds|}{|f(t) - f^{\delta}(t)|} = ?$$

Betrachte die Fehlerverstärkung für große n, was bedeutet das für die Stabilität von Integrieren und Differenzieren?
Ist das Lösen von Differentialgleichungen also ein stabiler Prozess?
Bonus: Warum lassen sich die Ergebnisse nicht für kleine n umkehren?
Hinweis: $\cos'(t) = -\sin(t)$, $\sin'(t) = cos(t)$
Kettenregel $f(g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$
$|\cos(x)|, |\sin(x)| \le \cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$

Übungsblatt 4 Lichtstrahlen

1. Klassischer Fall

Wenn man die Lichtstrahlen im gravitationsfreien Raum ($R = 0$) betrachtet, ergibt sich für Lichtstrahlen die Gleichung

$$u''(\phi) + u(\phi) = 0$$

- Finde eine mögliche Lösung für das Problem.
- Transformiere die in Polarkoordinaten gegebene Lösung in Karthesische Koordinaten. Hierbei gilt $r(\phi) = 1/u(\phi)$ und

$$x(\phi) = r(\phi) * \cos(\phi)$$
$$y(\phi) = r(\phi) * \sin(\phi)$$

- Welche geometrische Form hat der Lichtstrahl?

2. Stationärer Punkt

Finde einen Zustand für $u(\phi)$, sodass im relativistischen Fall $u''(\phi) = u'(\phi) = 0$ gilt.

$$u''(\phi) + u(\phi) = \frac{3R}{2}u^2(\phi)$$

Was bedeutet das für den konkreten Lichtstrahl?
Gibt es einen stationären Punkt auch im klassischen Fall?

3. Lichtstrahlen berechnen (Gruppenarbeit)

Gegeben sind Startwerte für $u(0), u'(0)$ eines Lichtstrahls. Wir wollen berechnen für welches ϕ dieser Lichtstrahl eine sehr große Kugel schneidet (wir befinden uns im Inneren). Erstelle einen Algorithmus, welcher dieses Problem löst!
Wenn unbekannte Größen auftauchen, überlege ob diese im Vorhinein bekannt wären, sodass man sie verwenden kann. Es ist darauf Wert zu legen eine Balance zwischen Rechenaufwand und Genauigkeit zu erreichen. Man kann annehmen, dass sich $u(\phi)$ bis zum Schnitt mit der Kugel monoton verhält.
Bei Fragen zu numerischen Verfahren bitte melden.
Bereitet euch vor diesen Algorithmus auf der Tafel zu beschreiben.