Aufgabenstellung 1 – Problemstellung

Wir wollen eine Nachricht über einen digitalen Kanal, der nur 0 oder 1 übertragen kann, schicken. Die Nachricht ist eine Folge aus den Zeichen A, B, C und D. Eine typische Nachricht wäre etwa

BAAAABCACAAADAAAADAABCAAA
AABDBAAABABBAAAAAAAABAAAB
AAAAACAABABADCBABAABABBAA
ABAAADAAAAAAABAAABAAAAAAB

Dabei wissen wir, dass an jeder Stelle der Nachricht mit Wahrscheinlichkeit 0,7 ein A, mit 0,2 ein B, mit 0,05 ein C und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 ein D vorkommt. Ziel ist es, für die Übertragung diese Nachricht als Folge von 0 und 1 zu codieren.

a) Findet eine Codierung der Zeichen A, B, C und D mit Hilfe von 0 und 1.
b) Teilt euch in jeder Gruppe in Zweierpaare auf. Erstellt jeweils eine Nachricht und codiert diese mit dem in a) erstellen Code. Diese Nachricht soll jeweils die andere Zweiergruppe decodieren.
c) Versucht, die durchschnittliche Codewortlänge für eure Codierung zu berechnen. Geht es eventuell auch noch „besser“, d. h. findet ihr einen Code der mit weniger Zeichen auskommt?

Aufgabenstellung 2 – Thema: Grundbegriffe der Codierungstheorie

<u>Hinweis</u>**:** B = {0, 1} ist ein Binäralphabet. Für die Menge aller Wörter der Länge 2 über B gilt:
B^2 = {00, 01, 10, 11}

Beispiel 2.1. Gib die Menge aller Wörter mit Länge 3 über dem Binäralphabet B = {0, 1} an (= B^3)!

Beispiel 2.2.
a) Wie viele Wörter der Länge 4 gibt es über dem Alphabet A = {0, 1, 2}?
b) Allgemein: Wie viele Wörter der Länge n gibt es über …
   (1) … dem Binäralphabet?
   (2) … einem Alphabet mit q Zeichen?

Beispiel 2.3. Beim Morse-Code werden die 29 Buchstaben {a, b, c, …, x, y, z, ä, ö, ü} durch Wörter, die höchstens aus 4 kurzen und/oder langen Signalen ({•, – }) bestehen, dargestellt. Wie viele solche Wörter gibt es?

Beispiel 2.4. Übung 1.1. auf Seite 3

Zusatz: Decodiere folgende, mit dem Morse-Code codierte Nachricht:
– • – • –, • •, – •,,,,• – – – – ,• • • • •,,,,– ,• –,– – •, • ,– •,,,, – • • •, •, – – •, • •, – •, – •, •, – •,,,,– • •, • •, •,,,,• • – •, •, • – •, • •, •, – •, • – • – • – , • • • – • –

Aufgabenstellung 3 – Thema: Eindeutig decodierbare Codes

Beispiel 3.1. Ist der Code C_1 = {a, c, ad, abb, bad, deb, bbcde} eindeutig decodierbar?

Beispiel 3.2.
a) Ist der Code C_{2a} = {0, 010} eindeutig decodierbar?
b) Ist der Code C_{2b} ={110, 1110, 1011, 1101} eindeutig decodierbar?

Beispiel 3.3. Ist der Code C_3 = {0, 01, 011, 0111} eindeutig decodierbar?

Beispiel 3.4. Ist der Code C_4 = {00, 10, 010, 111, 0110, 1101, 11001} eindeutig decodierbar?

Beispiel 3.5. Ist der Code C_5 = = {11, 101, 1011} eindeutig decodierbar?

Zusatzbeispiel Ist der Code C^* = {0, 10, 011, 11111} eindeutig decodierbar?

Aufgabenstellung 4 – Thema: Präfixcodes

Beispiel 4.1. Ist der Code C = {1, 00, 010, 0110, 0111} ein Präfixcode?

Beispiel 4.2. Erstelle für folgenden Nachrichtenvorrat einen Präfixcode über dem Binäralphabet.
a) N_1 = {A, B, C, D}
b) N_2 = {0, 1, 2, … , 8, 9}

Beispiel 4.3. Erfüllt der Code C = {0, 01, 100, 0110} die Ungleichung von Kraft und McMillan? Ist er eindeutig decodierbar?

Beispiel 4.4. Gegeben sind folgende Codewortlängen: $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$ $n_4 = 3$, $n_5 = 4$, $n_6 = 5$. Überprüfe ob es dazu einen Präfixcode gibt und wenn ja, konstruiere einen solchen.

Satz: Sei C ein eindeutig decodierbarer Code über dem Binäralphabet B = {0, 1}, der aus k Wörtern $c_1, c_2, \dots, c_k$ besteht, die die Längen $n_1, n_2, \dots, n_k$ haben.
Dann gilt die Ungleichung von Kraft und McMillan $\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_2}}+\dots+\frac{1}{2^{n_k}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{n_i}}\leq 1$

Satz: Es seien $k\in\mathbb{N}$ und $n_1, n_2, \dots, n_k \in\mathbb{N}$. Wenn die Ungleichung $\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_2}}+\dots+\frac{1}{2^{n_k}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{n_i}}\leq 1$ von Kraft und McMillan erfüllt ist, dann existiert ein Präfixcode $C=\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ über dem Binäralphabet B = {0, 1}, dessen k Codewörter $c_1, c_2, \dots, c_k$ der Reihe nach die Längen $n_1, n_2, \dots, n_k$ haben.

Aufgabenstellung 5 – Thema: Huffman-Codierung

Beispiel 5.1. Wie viele Fragen muss Alice höchstens stellen, um herauszufinden, in welchem Monat und an welchem Tag Bob Geburtstag hat, wenn dieser auf Fragen nur mit „Ja“ oder „Nein“ antworten darf?

Beispiel 5.2.
In einer großen Schachtel befinden sich 20 Kugeln: 6 schwarze, 4 rote, 4 blaue, 3 gelbe und 3 weiße. Alice zieht eine Kugel und notiert sich deren Farbe. Bob möchte nun wissen, welche Farbe die gezogene Kugel hat; Alice antwortet auf Fragen jedoch nur mit „Ja“ oder „Nein“.

a) Erstelle eine Fragestrategie!
b) Ermittelt für eure Fragestrategie folgendes: Wenn Alice immer wieder eine Kugel zieht, die Farbe notiert und die Kugel wieder zurücklegt, wie viele Fragen muss Bob dann **durchschnittlich** stellen?

Beispiel 5.3.
Konstruiere mit dem Verfahren von Huffman optimale binäre Codes für folgende Wahrscheinlichkeiten und berechne die durchschnittliche Codewortlänge.
a) (0,8; 0,1; 0,06; 0,02; 0,02)
b) (0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2)
c) (0,2; 0,18; 0,1; 0,1; 0,1; 0,061; 0,059; 0,04; 0,04; 0,04; 0,04; 0,03; 0,01)

Beispiel 5.4.
Wir wollen eine Nachricht über einen digitalen Kanal, der nur 0 und 1 übertragen kann, schicken. Die Nachricht ist eine Folge der Zeichen A, B und C. Eine typische Nachricht wäre etwa

AAAAAAABCBAAAABAAAAAAABAAAAABAAAAABAAAAAC
AABAABAAAAAAABABAAAAACAAAAACBACABAAABAAAA
AAAAAAAAAABAABAAAACAAAAABAABABAAAABAABAAA
CACAAABAAABAABABAACBAACAA

Dabei wissen wir, dass die Nachrichtenquelle an jeder Stelle der Nachricht mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 ein A, mit 0,15 ein B und mit 0,05 ein C ausgibt.

Ziel ist es, für die Übertragung diese Nachricht als Folge von 0 und 1 zu kodieren (Warum eigentlich – technisch einfach zu realisieren). Dabei sollen wir für jedes Zeichen im Durchschnitt nur höchstens 0,9 Bits benötigen – eine Folge von 100 Zeichen sollte im Durchschnitt also auf 90 Bits komprimiert werden können.

a) Erstelle eine Huffman-Code für diesen Nachrichtenvorrat.
b) Wie kann man die Codierung verändern, so dass die durchschnittliche Codewortlänge kleiner wird?

Quellen:

- Historische Entwicklung der optischen Nachrichtentechnik. Der Fackeltelegraph von Polybios. Online im Internet: http://it.tud.uni-essen.de/polybios.htm.

- ASCII. Online im Internet: http://lexikon.freenet.de/ASCII.

- Martin Werner: Nachrichtentechnik. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 4. Auflage,2003. ISBN 3-528-37433-0.

- Werner Heise und Pasquale Quattrocchi: Informations- und Codierungstheorie. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2. Auflage, 1989. ISBN 3-540-50537-7 und 0-387-50537-7.

- Edith Lindenbauer, Diplomarbeit. Informationstheorie und Quellencodierung im Schulunterricht – Didaktische Aufbereitung der *mathematischen Grundlagen*, 2005.