Matheseminar

Optimaler Brückenentwurf

Peter Gangl
Doktoratskolleg "Computational Mathematics", JKU Linz

10. Jänner 2014

Angewandte Mathematik

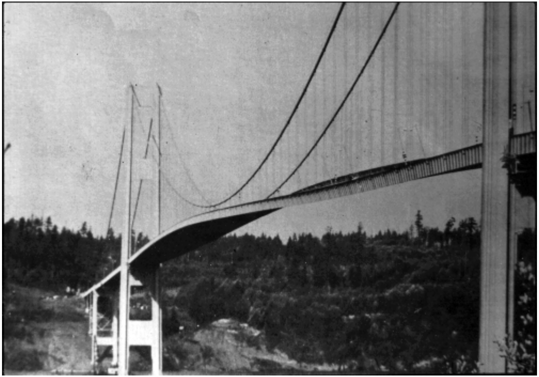
Angewandte Mathematik

Angewandte Mathematik

Warum optimieren? Was kann schon schief gehn?

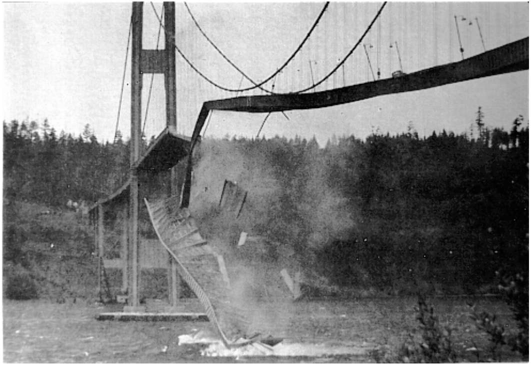
Angewandte Mathematik

Warum optimieren? Was kann schon schief gehn?
Negativbeispiel: Tacoma-Narrows-Brücke 1940 (WA, USA)



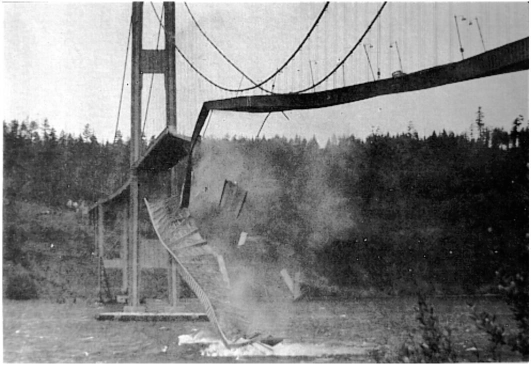
Angewandte Mathematik

Warum optimieren? Was kann schon schief gehn?
Negativbeispiel: Tacoma-Narrows-Brücke 1940 (WA, USA)



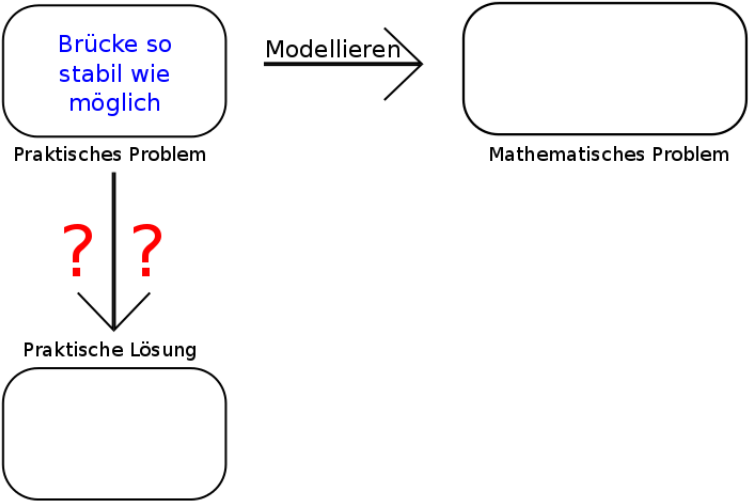
Angewandte Mathematik

Warum optimieren? Was kann schon schief gehn?
Negativbeispiel: Tacoma-Narrows-Brücke 1940 (WA, USA)

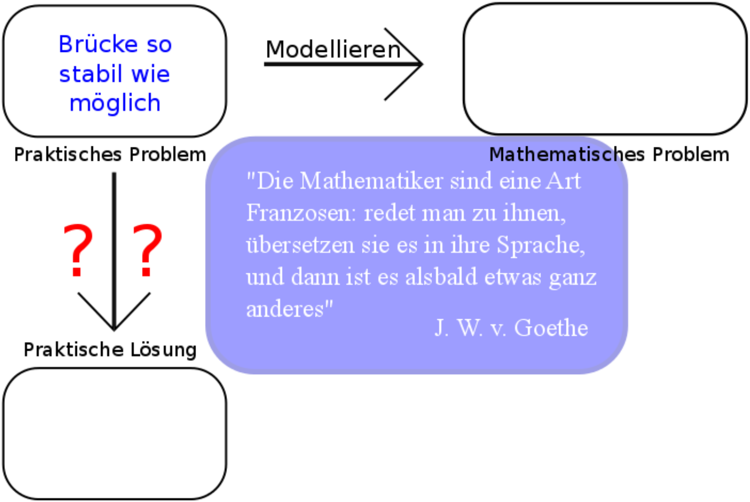


[Link zu YouTube-Video]

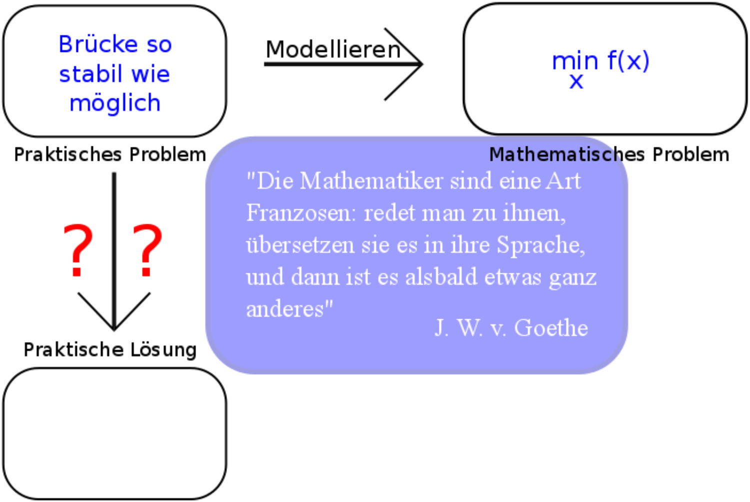
Angewandte Mathematik



Angewandte Mathematik



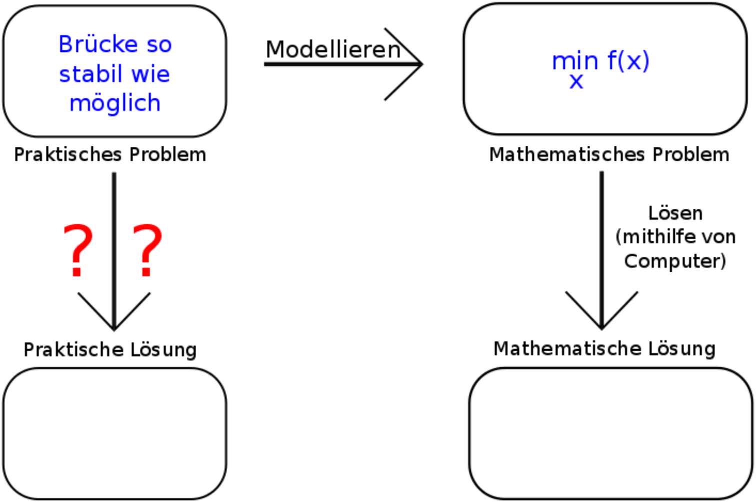
Angewandte Mathematik



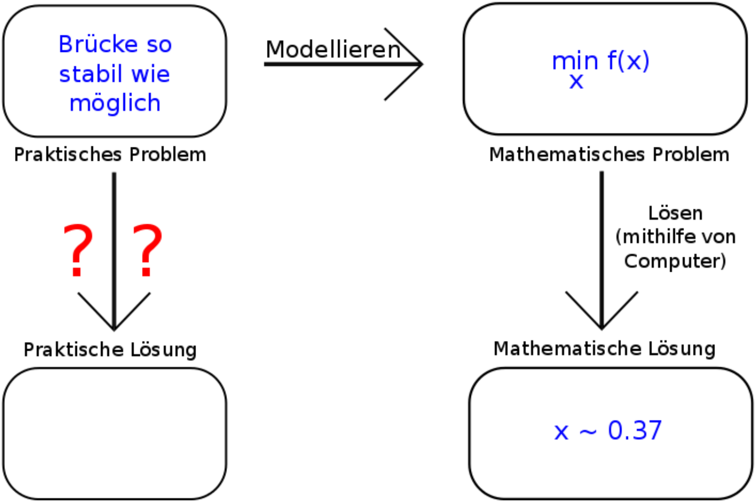
"Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsbald etwas ganz anderes"

J. W. v. Goethe

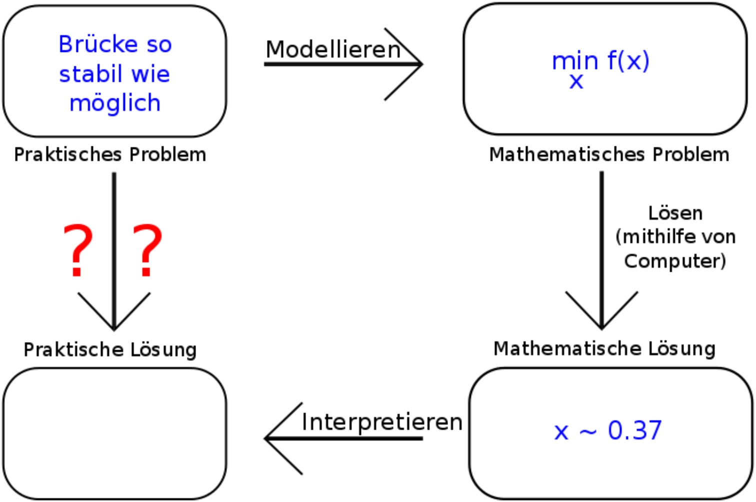
Angewandte Mathematik



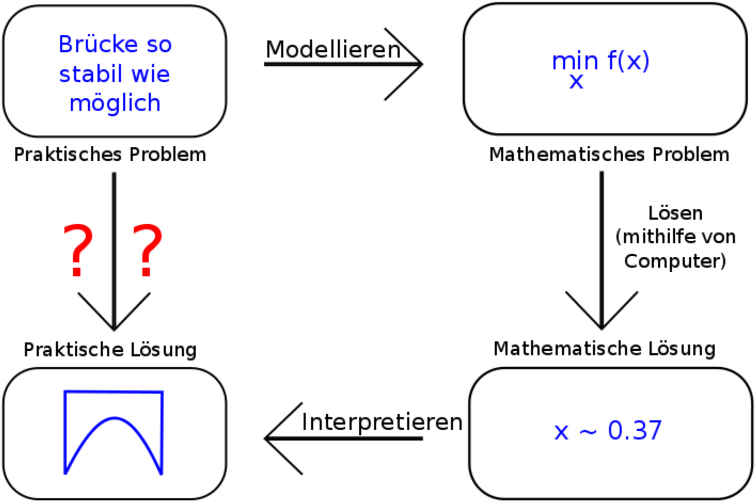
Angewandte Mathematik



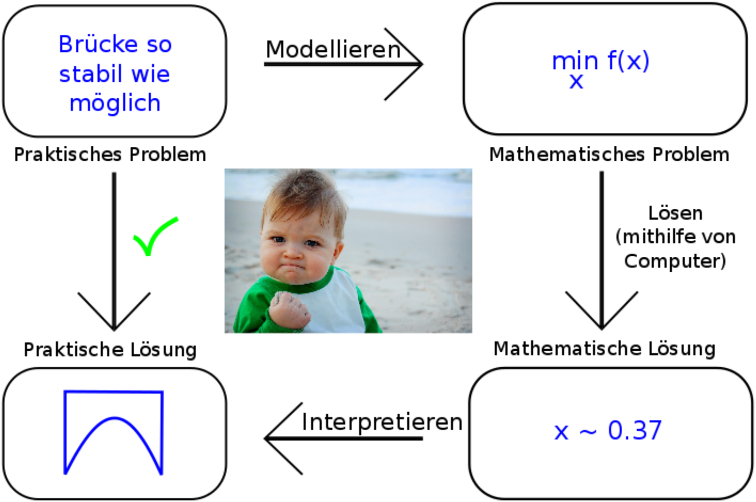
Angewandte Mathematik



Angewandte Mathematik



Angewandte Mathematik



Übersicht

1. Problembeschreibung und Modellierung
    - Zusatz 1: Berechnung der Steifigkeit
2. Mathematische Lösung
    - Ableitungsfreie Methoden
    - Methoden mit Ableitung
    - Zusatz 2: mehrdimensionale Optimierung

Übersicht

Problembeschreibung und Modellierung

Problembeschreibung: Finde *optimale* Brücke, d.h.

- Brücke soll gegebene, auf sie wirkende Lasten so gut wie möglich aushalten

Problembeschreibung und Modellierung

Problembeschreibung: Finde *optimale* Brücke, d.h.

- Brücke soll gegebene, auf sie wirkende Lasten so gut wie möglich aushalten

Problembeschreibung und Modellierung

Problembeschreibung: Finde *optimale* Brücke, d.h.

- Brücke soll gegebene, auf sie wirkende Lasten so gut wie möglich aushalten
- Brücke soll nicht zu viel Material verbrauchen

$$f(\ ) = \frac{1}{\text{Steifigkeit}(\ )} \longrightarrow \min$$

Problembeschreibung und Modellierung

Problembeschreibung: Finde *optimale* Brücke, d.h.

- Brücke soll gegebene, auf sie wirkende Lasten so gut wie möglich aushalten
- Brücke soll nicht zu viel Material verbrauchen

$$f(\quad) = \frac{1}{\text{Steifigkeit}(\quad)} + \lambda * \text{Gewicht}(\quad) \longrightarrow \min$$

Problembeschreibung und Modellierung

Problembeschreibung: Finde *optimale* Brücke, d.h.

- Brücke soll gegebene, auf sie wirkende Lasten so gut wie möglich aushalten
- Brücke soll nicht zu viel Material verbrauchen

$$f(\,) = \frac{1}{\text{Steifigkeit}(\,)} + \lambda * \text{Gewicht}(\,) \longrightarrow \min$$

Problembeschreibung und Modellierung

Problembeschreibung: Finde *optimale* Brücke, d.h.

- Brücke soll gegebene, auf sie wirkende Lasten so gut wie möglich aushalten
- Brücke soll nicht zu viel Material verbrauchen

$$f(\;) = \frac{1}{\text{Steifigkeit}(\;)} + \lambda^{*}\,\text{Gewicht}(\;) \longrightarrow \min$$

Modellierung:

- 3D Brücke $\rightarrow$ 2D Modell (Modellierungsfehler!)

Problembeschreibung und Modellierung

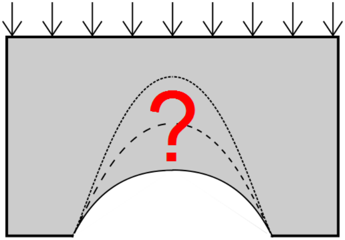
Problembeschreibung: Finde *optimale* Brücke, d.h.

- Brücke soll gegebene, auf sie wirkende Lasten so gut wie möglich aushalten
- Brücke soll nicht zu viel Material verbrauchen

$$f(\;) = \frac{1}{\text{Steifigkeit}(\;)} + \lambda * \text{Gewicht}(\;) \longrightarrow \min$$

Modellierung:

- 3D Brücke $\rightarrow$ 2D Modell (Modellierungsfehler!)



Problembeschreibung und Modellierung

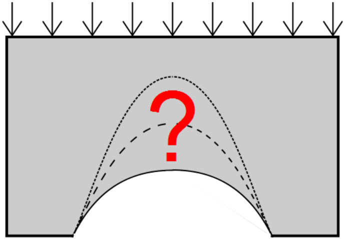
Problembeschreibung: Finde *optimale* Brücke, d.h.

- Brücke soll gegebene, auf sie wirkende Lasten so gut wie möglich aushalten
- Brücke soll nicht zu viel Material verbrauchen

$$f(\ ) = \frac{1}{\text{Steifigkeit}(\ )} + \lambda^* \,\text{Gewicht}(\ ) \longrightarrow \min$$

Modellierung:

- 3D Brücke $\rightarrow$ 2D Modell (Modellierungsfehler!)
- Dürfen untere Randkurve modifizieren



Problembeschreibung und Modellierung

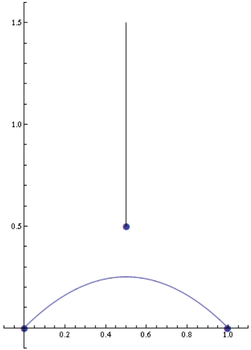
Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch
Bézier-Kurve:

- 1 Parameter

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter

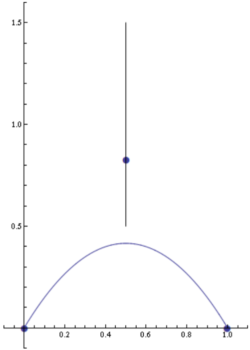


$x = 0$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter

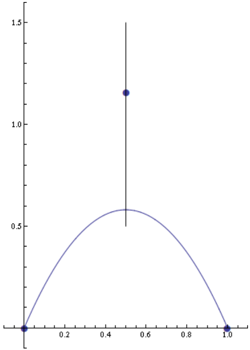


$x = 0.33$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter

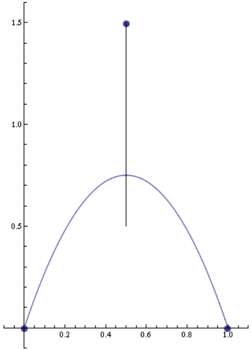


$x = 0.66$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter

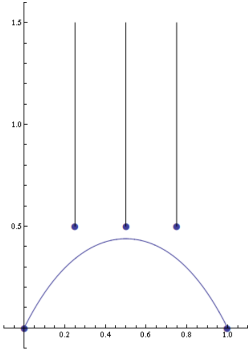


$x = 1$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)

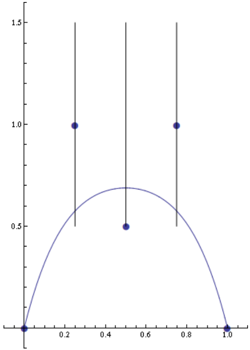


$$x = 0$$
$$y = 0$$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)

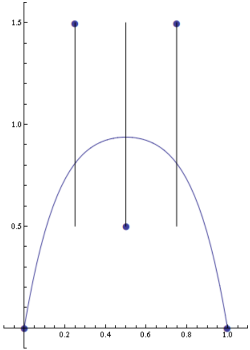


$$x = 0$$
$$y = 0.5$$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)

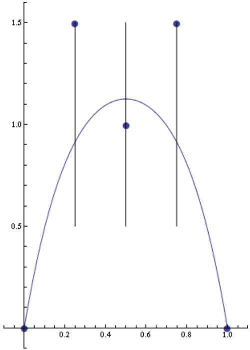


$$x = 0$$
$$y = 1$$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)

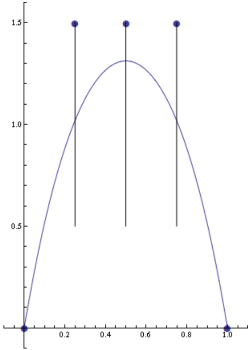


$$x = 0.5$$
$$y = 1$$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)

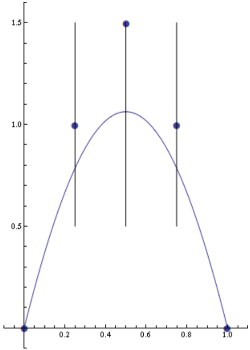


$$x = 1$$
$$y = 1$$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)

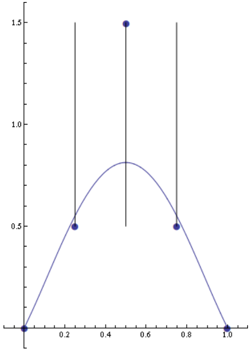


$$x = 1$$
$$y = 0.5$$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)



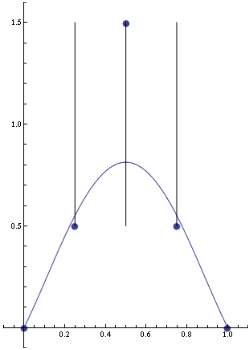
$$x = 1$$
$$y = 0$$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)

Hier: vorerst nur 1 Parameter



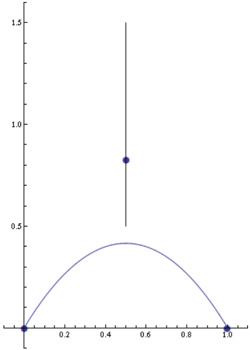
$$x = 1$$
$$y = 0$$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)

Hier: vorerst nur 1 Parameter



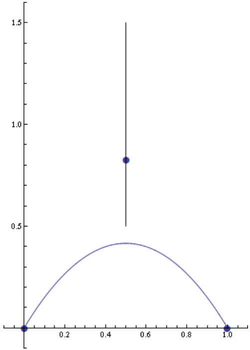
$x = 0.33$

Problembeschreibung und Modellierung

Modellierung:
Untere Randkurve gegeben durch *Bézier-Kurve*:

- 1 Parameter
- 2 Parameter (Symmetrie!)

Hier: vorerst nur 1 Parameter



$x = 0.33$

$\Longrightarrow$ Identifizierung von ◠ mit x

$$f(x) = \frac{1}{Steifigkeit(x)} + \lambda * Gewicht(x)$$

Optimierung

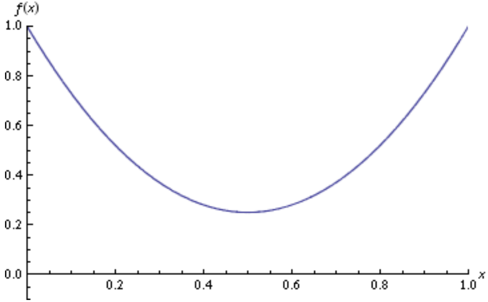
$$\boxed{\min_{x \in [0,1]} f(x)}$$

- Beispiel: $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$

Optimierung

$$\boxed{\min_{x \in [0,1]} f(x)}$$

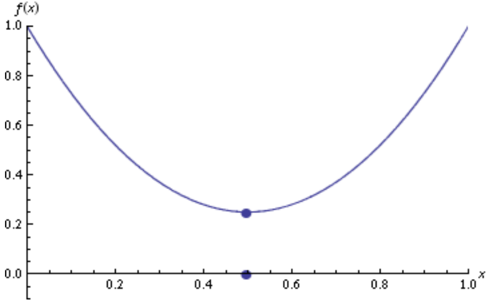
- Beispiel: $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$



Optimierung

$$\boxed{\min_{x\in[0,1]} f(x)}$$

- Beispiel: $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$



Optimierung

$$\boxed{\min_{x \in [0,1]} f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{Steifigkeit(}$  $(x))} + \lambda * Gewicht($  $(x))$

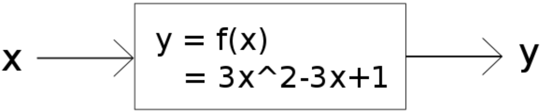
- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

Optimierung

$$\boxed{\min_{x \in [0,1]} \ f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{Steifigkeit((x))} + \lambda * Gewicht((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig



- Vorwärts-Problem: gegeben x, finde y
- Rückwärts-Problem: finde x, das zu gewünschtem y passt

Optimierung

$$\boxed{\min_{x \in [0,1]} f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{Steifigkeit((x))} + \lambda * Gewicht((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

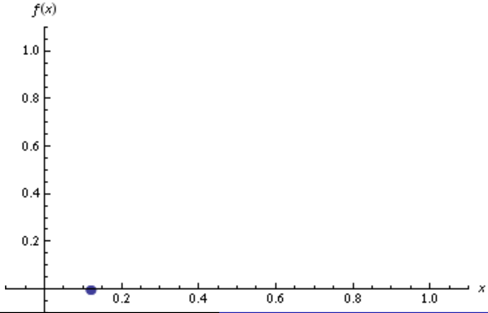
- Vorwärts-Problem: gegeben x, finde y
- Rückwärts-Problem: finde x, das zu gewünschtem y passt

Optimierung

$$\boxed{\min_{x\in[0,1]} f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{Steifigkeit((x))} + \lambda * Gewicht((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

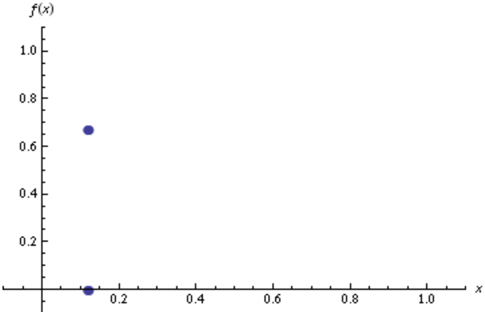


Optimierung

$$\boxed{\min_{x \in [0,1]} f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{Steifigkeit((x))} + \lambda * Gewicht((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

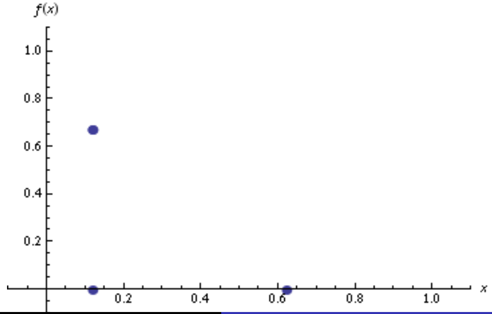


Optimierung

$$\boxed{\min_{x \in [0,1]} f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{\mathit{Steifigkeit}((x))} + \lambda * \mathit{Gewicht}((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

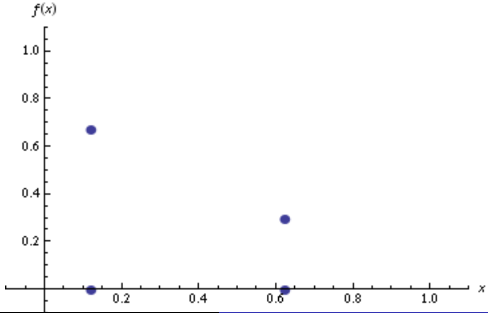


Optimierung

$$\boxed{\min_{x \in [0,1]} \; f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{Steifigkeit((x))} + \lambda * Gewicht((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

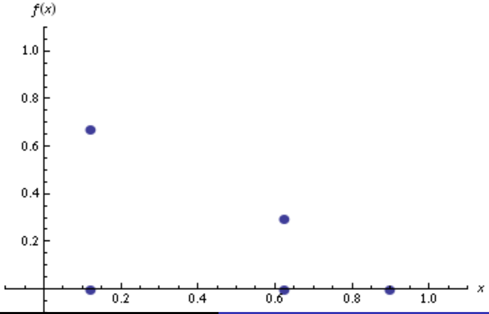


Optimierung

$$\boxed{\min_{x\in[0,1]} f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{\mathit{Steifigkeit}((x))} + \lambda * \mathit{Gewicht}((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

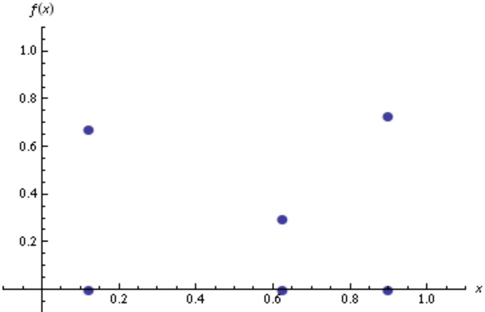


Optimierung

$$\boxed{\min_{x \in [0,1]} f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{Steifigkeit((x))} + \lambda * Gewicht((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

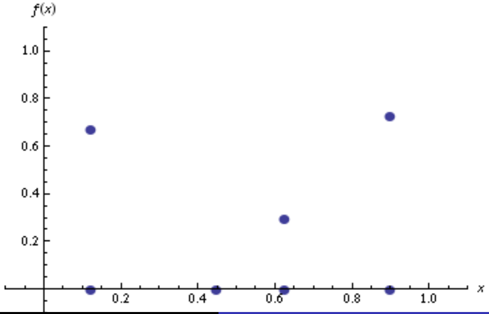


Optimierung

$$\boxed{\min_{x\in[0,1]} \; f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{Steifigkeit((x))} + \lambda * Gewicht((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

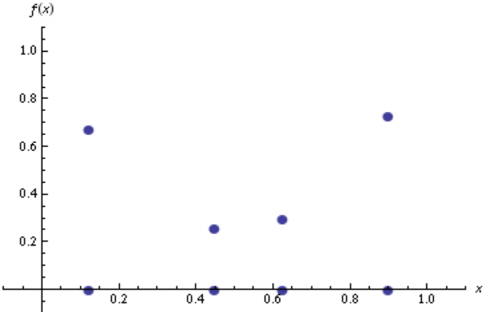


Optimierung

$$\boxed{\min_{x\in[0,1]} f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{\mathit{Steifigkeit}((x))} + \lambda * \mathit{Gewicht}((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig



Optimierung

$$\boxed{\min_{x\in[0,1]} f(x)}$$

Hier: $f(x) = \frac{1}{Steifigkeit((x))} + \lambda * Gewicht((x))$

- Funktion nicht explizit bekannt
- Funktionswert für fixe Brücke berechenbar
- Berechnungen sehr aufwändig

- Ziel: Finde Näherung an Minimum mit möglichst wenig Aufwand

Übersicht

Zusatz 1: Berechnung der Steifigkeit

Skip

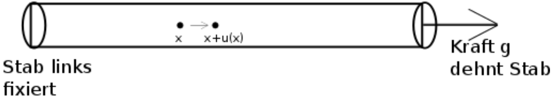
Zusatz 1: Berechnung der Steifigkeit

Zur Berechnung der Steifigkeit brauchen wir die Verformung der Brücke bei den gegebenen Lasten.

Zusatz 1: Berechnung der Steifigkeit

Zur Berechnung der Steifigkeit brauchen wir die Verformung der Brücke bei den gegebenen Lasten.

Vereinfachung: Verformung eines Zugstabs



- Verformung durch Anziehen an rechter Seite
- Verschiebungsfunktion u: Punkt x vor Verformung ist nachher bei $x + u(x)$
  Also: u ist der Unterschied zwischen Position eines Punktes vor und nach Verformung
- Aufgabe: Bestimme die Funktion u
- u ist Lösung der Differentialgleichung

$$u''(x) = 0$$
$$u(0) = 0 \quad u'(1) = g$$

Aufgabe

Aufgabe FDM

Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

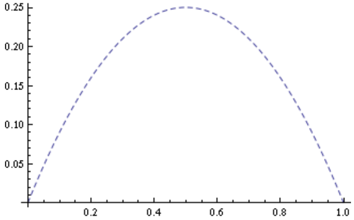
a) Die rechte Seite ist konstant. Berechne u!

b) Für allgemeines f: Berechne Näherung an $u(1/4)$, $u(1/2)$, $u(3/4)$!
Hinweis: Ersetze u'' durch einen Differenzenquotienten!

Aufgabe

Lösung mittels "Finite-Differenzen-Verfahren":

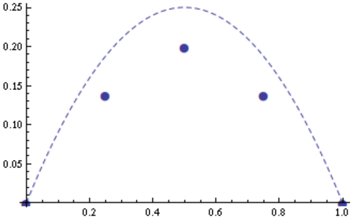
- Ersetze u'' durch Differenzenquotienten und betrachte Gleichung an einzelnen Stützstellen.
- Kombiniere Gleichungen für einzelne Stützstellen und löse lineares Gleichungssystem
- Je mehr Stützstellen, umso näher kommen wir an die echte Lösung heran



Aufgabe

Lösung mittels "Finite-Differenzen-Verfahren":

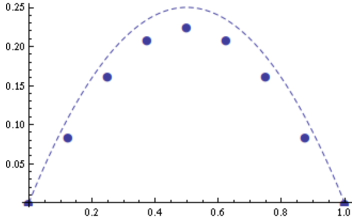
- Ersetze u'' durch Differenzenquotienten und betrachte Gleichung an einzelnen Stützstellen.
- Kombiniere Gleichungen für einzelne Stützstellen und löse lineares Gleichungssystem
- Je mehr Stützstellen, umso näher kommen wir an die echte Lösung heran



Aufgabe

Lösung mittels "Finite-Differenzen-Verfahren":

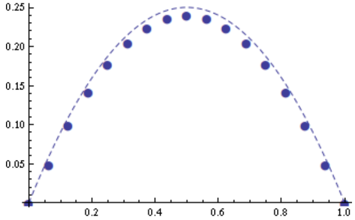
- Ersetze u'' durch Differenzenquotienten und betrachte Gleichung an einzelnen Stützstellen.
- Kombiniere Gleichungen für einzelne Stützstellen und löse lineares Gleichungssystem
- Je mehr Stützstellen, umso näher kommen wir an die echte Lösung heran



Aufgabe

Lösung mittels "Finite-Differenzen-Verfahren":

- Ersetze u'' durch Differenzenquotienten und betrachte Gleichung an einzelnen Stützstellen.
- Kombiniere Gleichungen für einzelne Stützstellen und löse lineares Gleichungssystem
- Je mehr Stützstellen, umso näher kommen wir an die echte Lösung heran



Übersicht

Unser Freund und Helfer: der Computer

Quiz-Frage (1. Preis: Twix)

Wann tauchte das Wort "Computer" zum ersten Mal im Oxford English Dictionary auf?

Antwort:

Unser Freund und Helfer: der Computer

Quiz-Frage (1. Preis: Twix)

Wann tauchte das Wort “Computer” zum ersten Mal im Oxford English Dictionary auf?

Antwort:

Unser Freund und Helfer: der Computer

Quiz-Frage (1. Preis: Twix)

Wann tauchte das Wort “Computer” zum ersten Mal im Oxford English Dictionary auf?

Antwort: **1613**

Unser Freund und Helfer: der Computer

Quiz-Frage (1. Preis: Twix)

Wann tauchte das Wort "Computer" zum ersten Mal im Oxford English Dictionary auf?

Antwort: **1613**

Computer (Beruf)
= somebody who computes

Unser Freund und Helfer: der Computer

- Berechnung von Steifigkeit mittels “echtem” Computer

Unser Freund und Helfer: der Computer

- Berechnung von Steifigkeit mittels “echtem” Computer
- durchschnittlicher Laptop: mehrere Milliarden FLOPS (floating point operations per second)

Unser Freund und Helfer: der Computer

- Berechnung von Steifigkeit mittels “echtem” Computer
- durchschnittlicher Laptop: mehrere Milliarden FLOPS (floating point operations per second)
- Berechnung dauert immer noch ca. 5 Sekunden

Unser Freund und Helfer: der Computer

- Berechnung von Steifigkeit mittels "echtem" Computer
- durchschnittlicher Laptop: mehrere Milliarden FLOPS (floating point operations per second)
- Berechnung dauert immer noch ca. 5 Sekunden
- z.B. 1 Milliarde FLOPS $\Longrightarrow$ 5 Milliarden Rechenoperationen (Addition oder Multiplikation)

Unser Freund und Helfer: der Computer

- Berechnung von Steifigkeit mittels “echtem” Computer
- durchschnittlicher Laptop: mehrere Milliarden FLOPS (floating point operations per second)
- Berechnung dauert immer noch ca. 5 Sekunden
- z.B. 1 Milliarde FLOPS $\Longrightarrow$ 5 Milliarden Rechenoperationen (Addition oder Multiplikation)
- händische Berechnung (z.B. 1 FLOPS):

Unser Freund und Helfer: der Computer

- Berechnung von Steifigkeit mittels “echtem” Computer
- durchschnittlicher Laptop: mehrere Milliarden FLOPS (floating point operations per second)
- Berechnung dauert immer noch ca. 5 Sekunden
- z.B. 1 Milliarde FLOPS $\Longrightarrow$ 5 Milliarden Rechenoperationen (Addition oder Multiplikation)
- händische Berechnung (z.B. 1 FLOPS): ca. 158 Jahre

Übersicht

Aufgabe

Aufgabe 1

Finde Näherung an das Minimum der konvexen Funktion

$$f(x) = 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \qquad x \in [-2, 2]$$

ohne Verwendung der Ableitung $f'(x)$!

Aufgabe

Aufgabe 1

Finde Näherung an das Minimum der konvexen Funktion

$$f(x) = 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \qquad x \in [-2, 2]$$

ohne Verwendung der Ableitung $f'(x)$!

- Gib den verwendeten Algorithmus an!
- Wie viele Funktionsauswertungen hast du benötigt, um nicht weiter als 0.01 von der Lösung entfernt zu sein?

Aufgabe

Aufgabe 1

Finde Näherung an das Minimum der konvexen Funktion

$$f(x) = 3\,x^4 - x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 1 \qquad x \in [-2, 2]$$

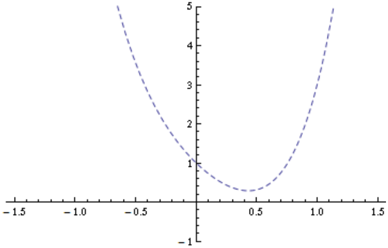
ohne Verwendung der Ableitung $f'(x)$!

- Gib den verwendeten Algorithmus an!
- Wie viele Funktionsauswertungen hast du benötigt, um nicht weiter als 0.01 von der Lösung entfernt zu sein?

Exakte Lösung: 0.432041

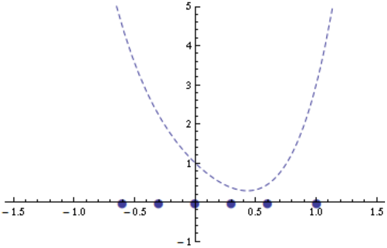
Variante 1: Durchprobieren

- Wähle Schrittweite
- Berechne Funktionswerte von Punkten
- Bestimme kleinsten Wert



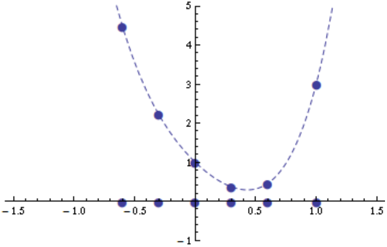
Variante 1: Durchprobieren

- Wähle Schrittweite
- Berechne Funktionswerte von Punkten
- Bestimme kleinsten Wert



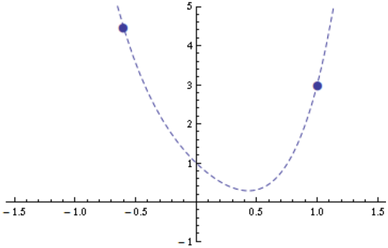
Variante 1: Durchprobieren

- Wähle Schrittweite
- Berechne Funktionswerte von Punkten
- Bestimme kleinsten Wert



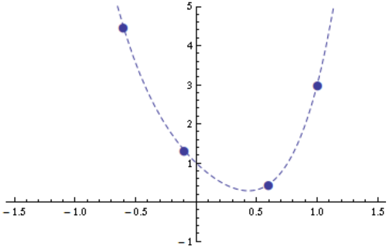
Variante 2: Intervallteilung

- Voraussetzung: Funktion konvex
- Wähle 2 Zwischenpunkte und berechne Funktionswert
- Minimum kann nicht außerhalb des Punktes mit größerem Funktionswert liegen
- Verkleinere Intervall
- Führe durch, bis Länge des verbleibenden Intervalls sehr klein → Minimum liegt in Intervall



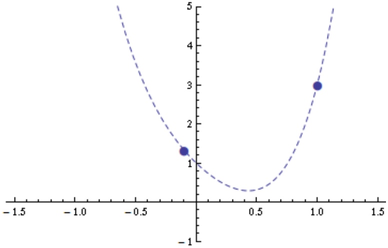
Variante 2: Intervallteilung

- Voraussetzung: Funktion konvex
- Wähle 2 Zwischenpunkte und berechne Funktionswert
- Minimum kann nicht außerhalb des Punktes mit größerem Funktionswert liegen
- Verkleinere Intervall
- Führe durch, bis Länge des verbleibenden Intervalls sehr klein $\rightarrow$ Minimum liegt in Intervall



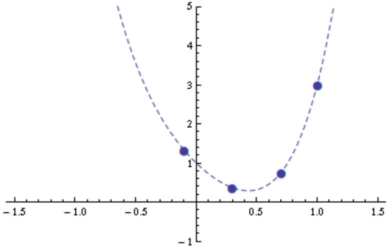
Variante 2: Intervallteilung

- Voraussetzung: Funktion konvex
- Wähle 2 Zwischenpunkte und berechne Funktionswert
- Minimum kann nicht außerhalb des Punktes mit größerem Funktionswert liegen
- Verkleinere Intervall
- Führe durch, bis Länge des verbleibenden Intervalls sehr klein $\rightarrow$ Minimum liegt in Intervall



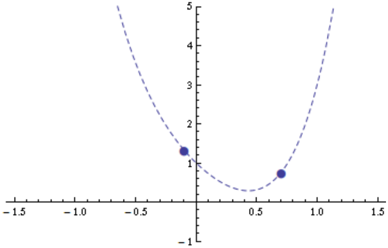
Variante 2: Intervallteilung

- Voraussetzung: Funktion konvex
- Wähle 2 Zwischenpunkte und berechne Funktionswert
- Minimum kann nicht außerhalb des Punktes mit größerem Funktionswert liegen
- Verkleinere Intervall
- Führe durch, bis Länge des verbleibenden Intervalls sehr klein → Minimum liegt in Intervall



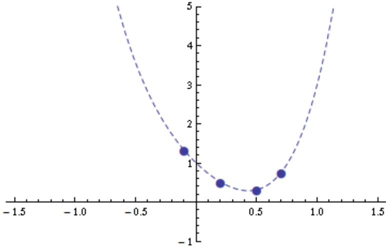
Variante 2: Intervallteilung

- Voraussetzung: Funktion konvex
- Wähle 2 Zwischenpunkte und berechne Funktionswert
- Minimum kann nicht außerhalb des Punktes mit größerem Funktionswert liegen
- Verkleinere Intervall
- Führe durch, bis Länge des verbleibenden Intervalls sehr klein → Minimum liegt in Intervall



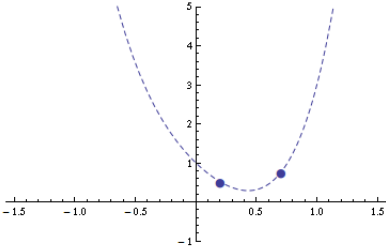
Variante 2: Intervallteilung

- Voraussetzung: Funktion konvex
- Wähle 2 Zwischenpunkte und berechne Funktionswert
- Minimum kann nicht außerhalb des Punktes mit größerem Funktionswert liegen
- Verkleinere Intervall
- Führe durch, bis Länge des verbleibenden Intervalls sehr klein $\rightarrow$ Minimum liegt in Intervall



Variante 2: Intervallteilung

- Voraussetzung: Funktion konvex
- Wähle 2 Zwischenpunkte und berechne Funktionswert
- Minimum kann nicht außerhalb des Punktes mit größerem Funktionswert liegen
- Verkleinere Intervall
- Führe durch, bis Länge des verbleibenden Intervalls sehr klein $\rightarrow$ Minimum liegt in Intervall



Variante 3: Intervallteilung II

Frage: Kluge Wahl für Zwischenpunkte?

Bei Wahl von 2 Zwischenpunkten wird immer einer eine neue Intervallgrenze, der andere wird verworfen.
Idee: Wähle Zwischenpunkte schon im Vorhinein so, dass er im nächsten Durchgang wieder verwendet werden kann.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a+b}{a} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} &= 0 \qquad \Phi := \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow \Phi - 1 - \frac{1}{\Phi} &= 0 \\ \Leftrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \Phi &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

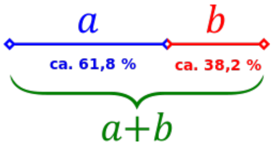
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ “Goldener Schnitt”

Variante 3: Intervallteilung II

Frage: Kluge Wahl für Zwischenpunkte?

Bei Wahl von 2 Zwischenpunkten wird immer einer eine neue Intervallgrenze, der andere wird verworfen.
Idee: Wähle Zwischenpunkte schon im Vorhinein so, dass er im nächsten Durchgang wieder verwendet werden kann.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a+b}{a} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} &= 0 \qquad\qquad \Phi := \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow \Phi - 1 - \frac{1}{\Phi} &= 0 \\ \Leftrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \Phi &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

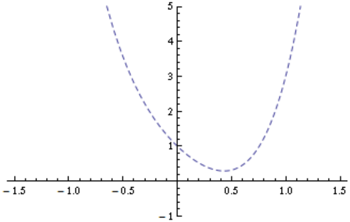


$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ “Goldener Schnitt”

Variante 4: Interpolation

Berechne Funktionswerte an n (z.B. $n = 3$) Stellen und lege Parabel durch

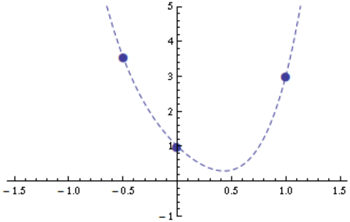
- Wähle 3 Punkte und berechne Funktionswerte
- Stelle Parabel auf, die durch diese 3 Punkte geht
- Bestimme Tiefpunkt der Parabel
- Wiederhole Prozedur mit Tiefpunkt und 2 weiteren Punkten



Variante 4: Interpolation

Berechne Funktionswerte an n (z.B. $n = 3$) Stellen und lege Parabel durch

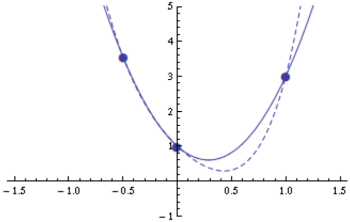
- Wähle 3 Punkte und berechne Funktionswerte
- Stelle Parabel auf, die durch diese 3 Punkte geht
- Bestimme Tiefpunkt der Parabel
- Wiederhole Prozedur mit Tiefpunkt und 2 weiteren Punkten



Variante 4: Interpolation

Berechne Funktionswerte an n (z.B. $n = 3$) Stellen und lege Parabel durch

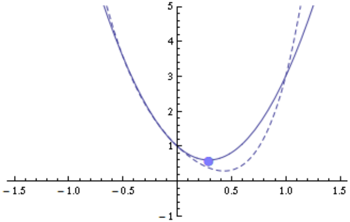
- Wähle 3 Punkte und berechne Funktionswerte
- Stelle Parabel auf, die durch diese 3 Punkte geht
- Bestimme Tiefpunkt der Parabel
- Wiederhole Prozedur mit Tiefpunkt und 2 weiteren Punkten



Variante 4: Interpolation

Berechne Funktionswerte an n (z.B. $n = 3$) Stellen und lege Parabel durch

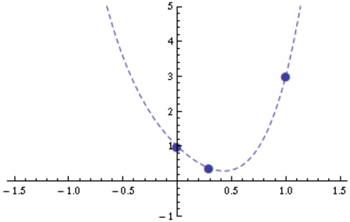
- Wähle 3 Punkte und berechne Funktionswerte
- Stelle Parabel auf, die durch diese 3 Punkte geht
- Bestimme Tiefpunkt der Parabel
- Wiederhole Prozedur mit Tiefpunkt und 2 weiteren Punkten



Variante 4: Interpolation

Berechne Funktionswerte an n (z.B. $n = 3$) Stellen und lege Parabel durch

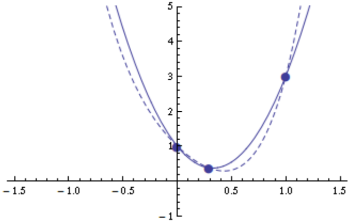
- Wähle 3 Punkte und berechne Funktionswerte
- Stelle Parabel auf, die durch diese 3 Punkte geht
- Bestimme Tiefpunkt der Parabel
- Wiederhole Prozedur mit Tiefpunkt und 2 weiteren Punkten



Variante 4: Interpolation

Berechne Funktionswerte an n (z.B. $n = 3$) Stellen und lege Parabel durch

- Wähle 3 Punkte und berechne Funktionswerte
- Stelle Parabel auf, die durch diese 3 Punkte geht
- Bestimme Tiefpunkt der Parabel
- Wiederhole Prozedur mit Tiefpunkt und 2 weiteren Punkten



Übersicht

Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

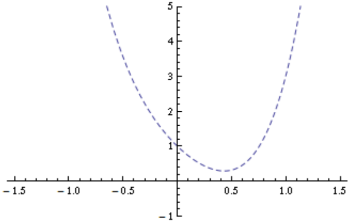
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar
  $\Longrightarrow$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

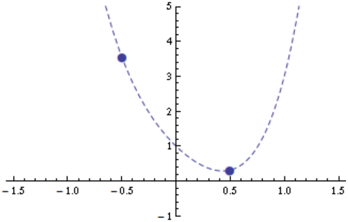
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar
  $\Longrightarrow$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



$h = 1$

Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

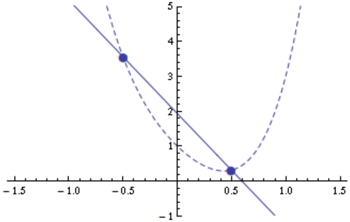
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar
  $\Longrightarrow$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



$h = 1$

Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

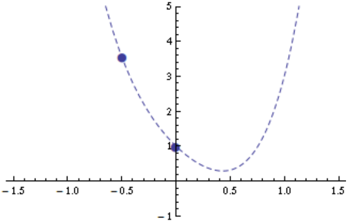
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar
  $\Longrightarrow$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



$h = 0.5$

Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

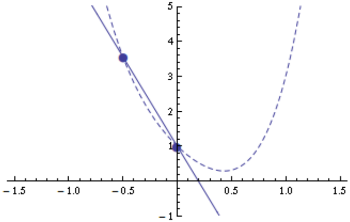
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar
  $\implies$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



$h = 0.5$

Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

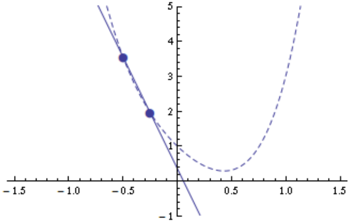
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar
  $\Longrightarrow$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



$h = 0.25$

Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

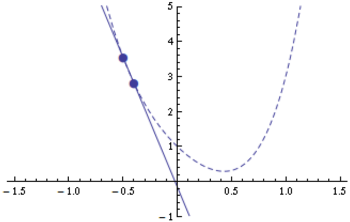
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar
  $\Longrightarrow$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



$h = 0.1$

Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

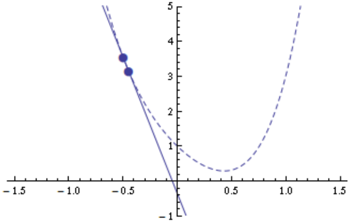
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar
  $\Longrightarrow$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



$h = 0.05$

Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

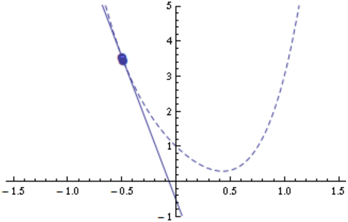
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar $\implies$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



$h = 0.01$

Überblick Ableitungen

Ableitung = Steigung der Tangente

Definition

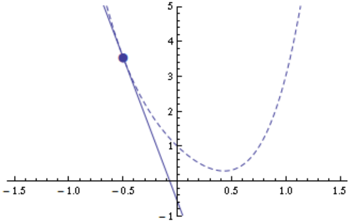
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Grenzwert der Steigung der Sekanten
- oft exakte Ableitung nicht verfügbar
  $\Longrightarrow$ verwende Differenzenquotienten als Näherung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

für $h > 0$ klein (z.B. $h = 0.01$)

$x = -0.5$



"h=0" (echte Ableitung)

Aufgabe

Aufgabe 2

Finde Näherung an das Minimum der konvexen Funktion

$$f(x) = 3\,x^4 - x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 1 \qquad x \in [-2, 2]$$

unter Verwendung der Ableitung $f'(x)$!

Aufgabe

Aufgabe 2

Finde Näherung an das Minimum der konvexen Funktion

$$f(x) = 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \qquad x \in [-2, 2]$$

unter Verwendung der Ableitung $f'(x)$!

- Gib den verwendeten Algorithmus an!
- Wie viele Funktionsauswertungen hast du benötigt, um nicht weiter als 0.01 von der Lösung entfernt zu sein?

Aufgabe

Aufgabe 2

Finde Näherung an das Minimum der konvexen Funktion

$$f(x) = 3\,x^4 - x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 1 \qquad x \in [-2, 2]$$

unter Verwendung der Ableitung $f'(x)$!

- Gib den verwendeten Algorithmus an!
- Wie viele Funktionsauswertungen hast du benötigt, um nicht weiter als 0.01 von der Lösung entfernt zu sein?

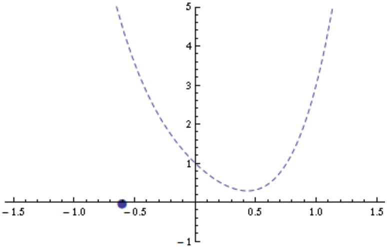
Exakte Lösung: 0.432041

Variante 1: Gradientenverfahren

Wähle Startwert, dann gehe immer "bergab"

Startwert $x^{(0)}$
Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Bestimme $f'(x^k)$ (evtl. als Differenzenquotient)
- Bestimme Abstiegsrichtung p_k:
  (i) $f'(x^k) > 0 \Longrightarrow p_k = -1$
  (ii) $f'(x^k) < 0 \Longrightarrow p_k = +1$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$

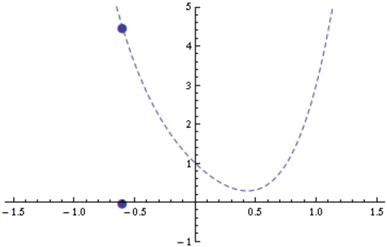


Variante 1: Gradientenverfahren

Wähle Startwert, dann gehe immer “bergab”

Startwert $x^{(0)}$
Für $k = 0, 1, 2, \dots$

- Bestimme $f'(x^k)$ (evtl. als Differenzenquotient)
- Bestimme Abstiegsrichtung p_k:
  - (i) $f'(x^k) > 0 \Longrightarrow p_k = -1$
  - (ii) $f'(x^k) < 0 \Longrightarrow p_k = +1$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$



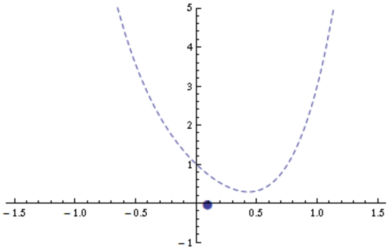
$f'(x) < 0 \Longrightarrow$ gehe nach rechts

Variante 1: Gradientenverfahren

Wähle Startwert, dann gehe immer "bergab"

Startwert $x^{(0)}$
Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Bestimme $f'(x^k)$ (evtl. als Differenzenquotient)
- Bestimme Abstiegsrichtung p_k:
  (i) $f'(x^k) > 0 \Longrightarrow p_k = -1$
  (ii) $f'(x^k) < 0 \Longrightarrow p_k = +1$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$

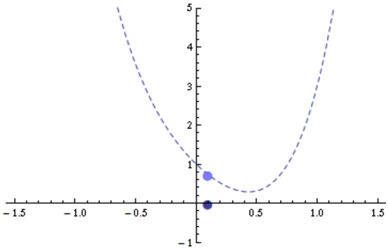


Variante 1: Gradientenverfahren

Wähle Startwert, dann gehe immer "bergab"

Startwert $x^{(0)}$
Für $k = 0, 1, 2, \dots$

- Bestimme $f'(x^k)$ (evtl. als Differenzenquotient)
- Bestimme Abstiegsrichtung p_k:
  (i) $f'(x^k) > 0 \Longrightarrow p_k = -1$
  (ii) $f'(x^k) < 0 \Longrightarrow p_k = +1$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$



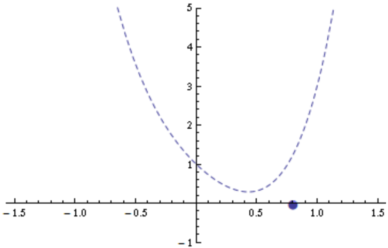
$f'(x) < 0 \Longrightarrow$ gehe nach rechts

Variante 1: Gradientenverfahren

Wähle Startwert, dann gehe immer "bergab"

Startwert $x^{(0)}$
Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Bestimme $f'(x^k)$ (evtl. als Differenzenquotient)
- Bestimme Abstiegsrichtung p_k:
  - (i) $f'(x^k) > 0 \Longrightarrow p_k = -1$
  - (ii) $f'(x^k) < 0 \Longrightarrow p_k = +1$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$

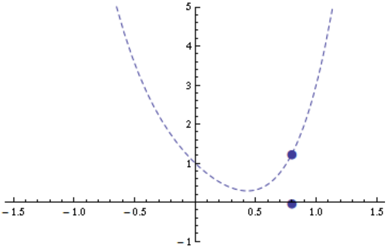


Variante 1: Gradientenverfahren

Wähle Startwert, dann gehe immer "bergab"

Startwert $x^{(0)}$
Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Bestimme $f'(x^k)$ (evtl. als Differenzenquotient)
- Bestimme Abstiegsrichtung p_k:
  (i) $f'(x^k) > 0 \Longrightarrow p_k = -1$
  (ii) $f'(x^k) < 0 \Longrightarrow p_k = +1$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$



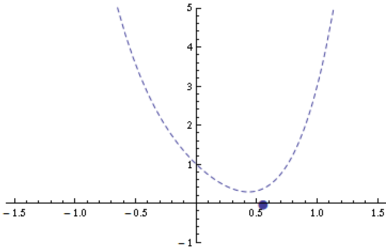
$f'(x) > 0 \Longrightarrow$ gehe nach links (und verringere Schrittweite)

Variante 1: Gradientenverfahren

Wähle Startwert, dann gehe immer "bergab"

Startwert $x^{(0)}$
Für $k = 0, 1, 2, \dots$

- Bestimme $f'(x^k)$ (evtl. als Differenzenquotient)
- Bestimme Abstiegsrichtung p_k:
  (i) $f'(x^k) > 0 \Longrightarrow p_k = -1$
  (ii) $f'(x^k) < 0 \Longrightarrow p_k = +1$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$

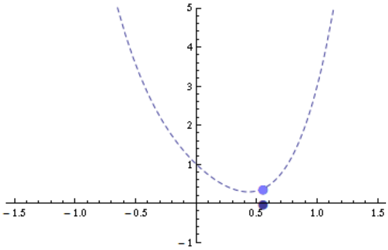


Variante 1: Gradientenverfahren

Wähle Startwert, dann gehe immer “bergab”

Startwert $x^{(0)}$
Für $k = 0, 1, 2, \dots$

- Bestimme $f'(x^k)$ (evtl. als Differenzenquotient)
- Bestimme Abstiegsrichtung p_k:
  (i) $f'(x^k) > 0 \Longrightarrow p_k = -1$
  (ii) $f'(x^k) < 0 \Longrightarrow p_k = +1$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$



Variante 2a: Newton-Verfahren I

Wähle Startpunkt und lege Parabel durch ihn und minimiere

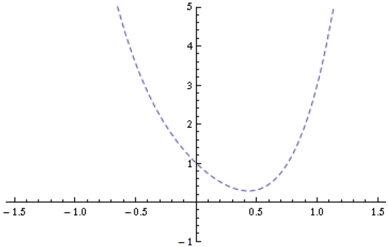
Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \dots$

- Lege Parabel

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

durch Funktion, sodass
$p(x^{(k)}) = f(x^{(k)})$,
$p'(x^{(k)}) = f'(x^{(k)})$,
$p''(x^{(k)}) = f''(x^{(k)})$.

- Setze $x^{(k+1)}$ = Scheitelpunkt der Parabel



Variante 2a: Newton-Verfahren I

Wähle Startpunkt und lege Parabel durch ihn und minimiere

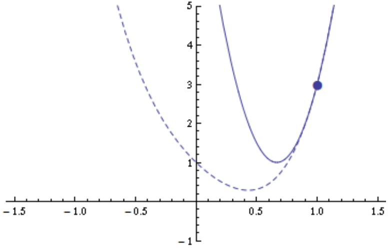
Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Lege Parabel

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

durch Funktion, sodass
$p(x^{(k)}) = f(x^{(k)})$,
$p'(x^{(k)}) = f'(x^{(k)})$,
$p''(x^{(k)}) = f''(x^{(k)})$.

- Setze $x^{(k+1)} =$ Scheitelpunkt der Parabel



Variante 2a: Newton-Verfahren I

Wähle Startpunkt und lege Parabel durch ihn und minimiere

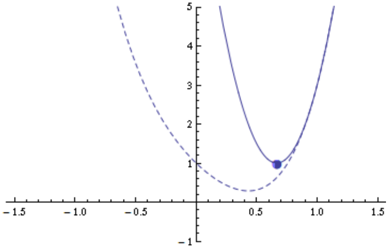
Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \dots$

- Lege Parabel

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

durch Funktion, sodass
$p(x^{(k)}) = f(x^{(k)})$,
$p'(x^{(k)}) = f'(x^{(k)})$,
$p''(x^{(k)}) = f''(x^{(k)})$.

- Setze $x^{(k+1)} =$ Scheitelpunkt der Parabel



Variante 2a: Newton-Verfahren I

Wähle Startpunkt und lege Parabel durch ihn und minimiere

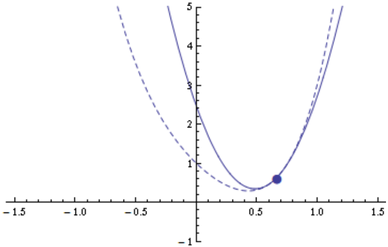
Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Lege Parabel

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

durch Funktion, sodass
$p(x^{(k)}) = f(x^{(k)})$,
$p'(x^{(k)}) = f'(x^{(k)})$,
$p''(x^{(k)}) = f''(x^{(k)})$.

- Setze $x^{(k+1)} =$ Scheitelpunkt der Parabel



Variante 2a: Newton-Verfahren I

Wähle Startpunkt und lege Parabel durch ihn und minimiere

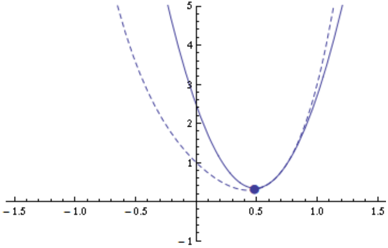
Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Lege Parabel

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

durch Funktion, sodass
$p(x^{(k)}) = f(x^{(k)})$,
$p'(x^{(k)}) = f'(x^{(k)})$,
$p''(x^{(k)}) = f''(x^{(k)})$.

- Setze $x^{(k+1)}$ = Scheitelpunkt der Parabel



Variante 2b: Newton-Verfahren II

Finde Nullstelle der Ableitung

$$g(x) = f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 6x - 3$$

Lege Tangente an Funktion und schneide mit x-Achse

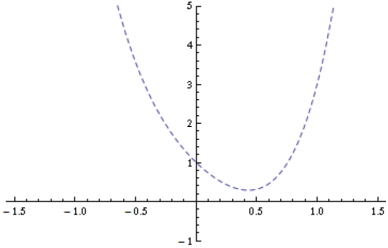
Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Lege Tangente

$$q(x) = kx + d$$

durch Funktion, sodass $q(x^{(k)}) = g(x^{(k)})$, $q'(x^{(k)}) = g'(x^{(k)})$.

- Setze $x^{(k+1)} =$ Nullstelle der Tangente



Variante 2b: Newton-Verfahren II

Finde Nullstelle der Ableitung

$$g(x) = f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 6x - 3$$

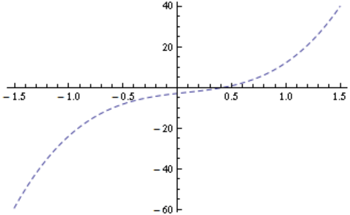
Lege Tangente an Funktion und schneide mit x-Achse

Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Lege Tangente

$$q(x) = kx + d$$

  durch Funktion, sodass $q(x^{(k)}) = g(x^{(k)})$, $q'(x^{(k)}) = g'(x^{(k)})$.
- Setze $x^{(k+1)} =$ Nullstelle der Tangente



Variante 2b: Newton-Verfahren II

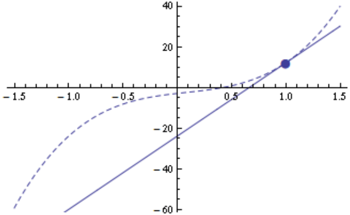
Finde Nullstelle der Ableitung

$$g(x) = f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 6x - 3$$

Lege Tangente an Funktion und schneide mit x-Achse

Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Lege Tangente
$$q(x) = kx + d$$
durch Funktion, sodass $q(x^{(k)}) = g(x^{(k)})$, $q'(x^{(k)}) = g'(x^{(k)})$.
- Setze $x^{(k+1)} =$ Nullstelle der Tangente



Variante 2b: Newton-Verfahren II

Finde Nullstelle der Ableitung

$$g(x) = f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 6x - 3$$

Lege Tangente an Funktion und schneide mit x-Achse

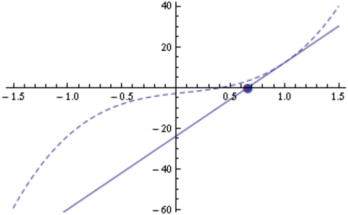
Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Lege Tangente

$$q(x) = kx + d$$

durch Funktion, sodass $q(x^{(k)}) = g(x^{(k)})$, $q'(x^{(k)}) = g'(x^{(k)})$.

- Setze $x^{(k+1)} =$ Nullstelle der Tangente



Variante 2b: Newton-Verfahren II

Finde Nullstelle der Ableitung

$$g(x) = f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 6x - 3$$

Lege Tangente an Funktion und schneide mit x-Achse

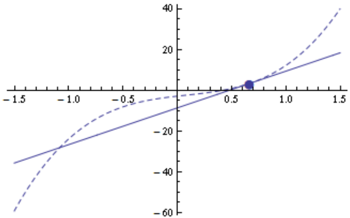
Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Lege Tangente

$$q(x) = kx + d$$

durch Funktion, sodass $q(x^{(k)}) = g(x^{(k)})$, $q'(x^{(k)}) = g'(x^{(k)})$.

- Setze $x^{(k+1)} =$ Nullstelle der Tangente



Variante 2b: Newton-Verfahren II

Finde Nullstelle der Ableitung

$$g(x) = f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 6x - 3$$

Lege Tangente an Funktion und schneide mit x-Achse

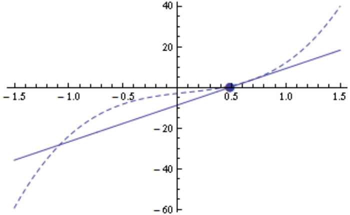
Startwert $x^{(0)}$ Für $k = 0, 1, 2, \dots$

- Lege Tangente

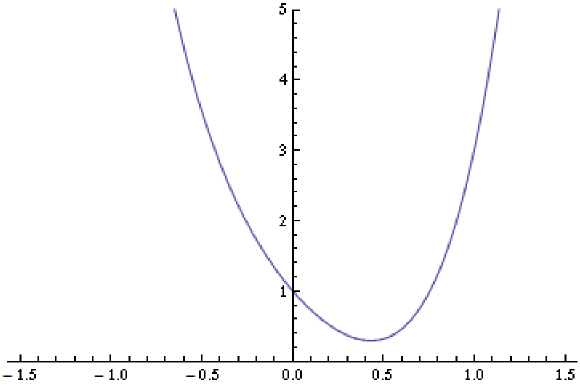
$$q(x) = kx + d$$

durch Funktion, sodass $q(x^{(k)}) = g(x^{(k)})$, $q'(x^{(k)}) = g'(x^{(k)})$.

- Setze $x^{(k+1)}$ = Nullstelle der Tangente



Aufgabe



$$f(x) = 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

Aufgabe

Aufgabe 3

Linker Sitznachbar: Führe 4 Iterationen des Gradienten-Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der folgenden irrationalen Zahlen aus!
Rechter Sitznachbar: Führe 4 Iterationen des Newton-Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der folgenden irrationalen Zahlen aus!

- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{6}$
- $\sqrt{7}$
- π
- e

Wer ist näher an der exakten Lösung?

Aufgabe

Aufgabe 4

Finde Näherung an das Minimum der nicht-konvexen Funktion

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 3x + 1! \qquad x \in [-10, 10]$$

Aufgabe

Aufgabe 4

Finde Näherung an das Minimum der nicht-konvexen Funktion

$$f(x) = x^4 + 4\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 1! \qquad x \in [-10, 10]$$

Welches Verfahren benötigt die wenigsten Funktionsauswertungen, um nicht weiter als 0.01 von der Lösung entfernt zu sein?

1)
Linker Sitznachbar: Startwert $x^{(0)} = 10$
Rechter Sitznachbar: Startwert $x^{(0)} = -10$

2) Startwert $x^{(0)} = -1$
Linker Sitznachbar: Newton-Verfahren
Rechter Sitznachbar: Gradienten-Verfahren

Aufgabe

Aufgabe 4

Finde Näherung an das Minimum der nicht-konvexen Funktion

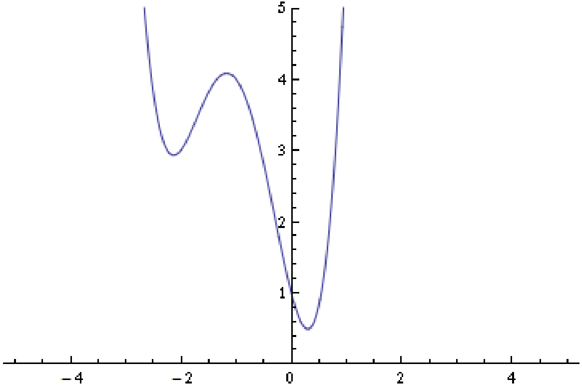
$$f(x) = x^4 + 4\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 1! \qquad x \in [-10, 10]$$

Welches Verfahren benötigt die wenigsten Funktionsauswertungen, um nicht weiter als 0.01 von der Lösung entfernt zu sein?

1)
Linker Sitznachbar: Startwert $x^{(0)} = 10$
Rechter Sitznachbar: Startwert $x^{(0)} = -10$

2) Startwert $x^{(0)} = -1$
Linker Sitznachbar: Newton-Verfahren
Rechter Sitznachbar: Gradienten-Verfahren
Exakte Lösung: 0.30084

Aufgabe



$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

Anwendung auf Brücke

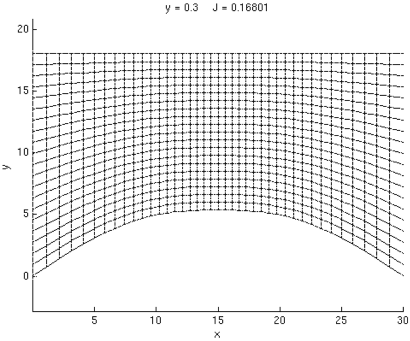
Übersicht

Zusatz 2: mehrdimensionale Optimierung

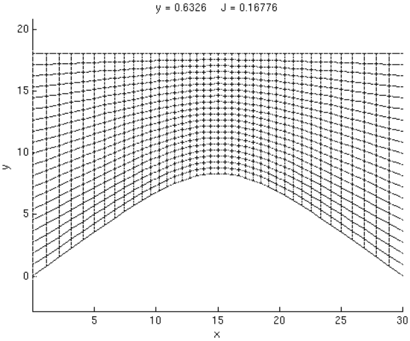
Skip

Die optimale Brücke

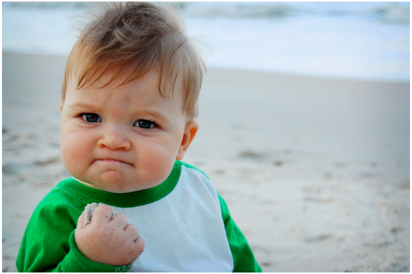
Anfangsdesign



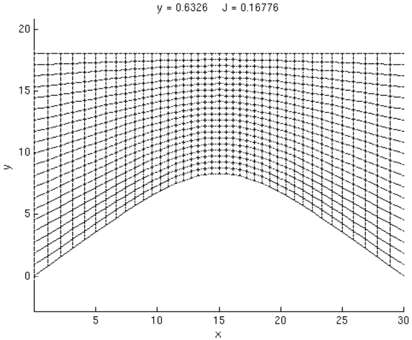
Optimales Design



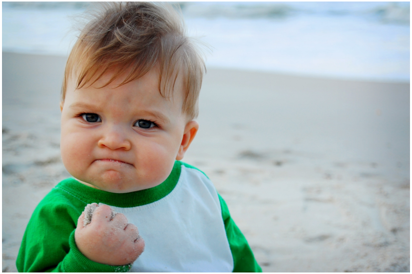
Die optimale Brücke



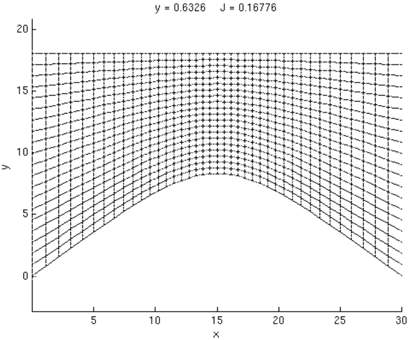
Optimales Design



Die optimale Brücke



Optimales Design



Hinweis: Projektwoche Angewandte Mathematik 09. - 13. Februar 2014