Geometrie mit komplexen Zahlen

Schülerseminar

Florian Buchegger, Urška Zore, Bert Jüttler

Johannes Kepler Universität Linz

Feb 07, 2014

Quadratische Gleichungen

Löse folgende quadratische Gleichung:

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

$$x = ?$$

Quadratische Gleichungen

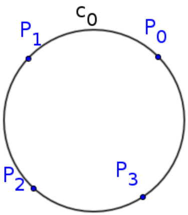
Löse folgende quadratische Gleichung:

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

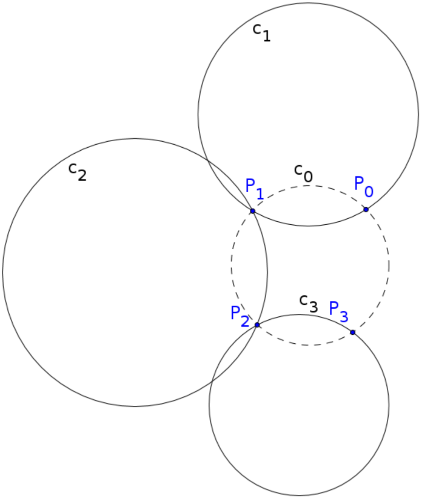
$$x = ?$$

$$x = 1 \pm \sqrt{-4}$$

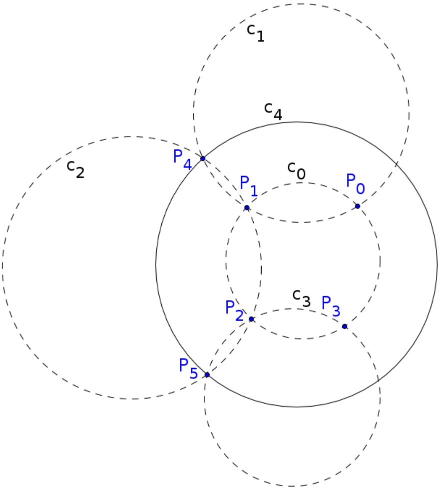
Satz von Miquel



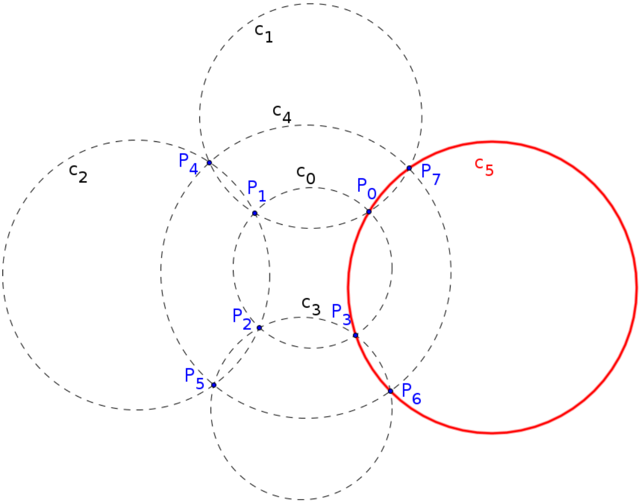
Satz von Miquel



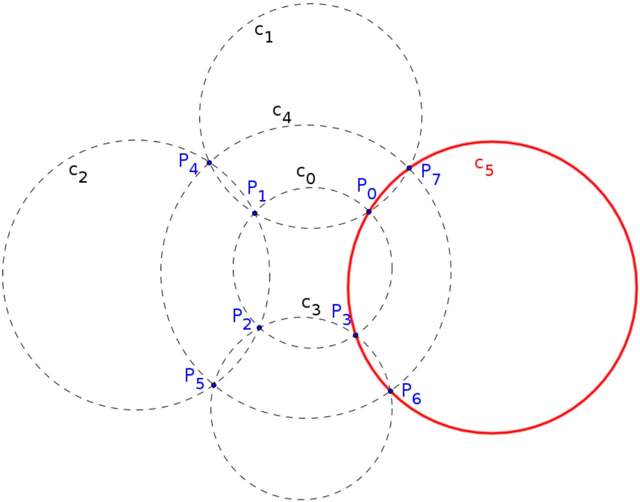
Satz von Miquel



Satz von Miquel



Satz von Miquel



Liegen P_0, P_3, P_6, P_7 immer auf einem Kreis?

1. Teil 1 : Grundlagen

2. Teil 2 : Geometrie I

3. Teil 3 : Geometrie II

Übersicht

1. Teil 1 : Grundlagen
2. Teil 2 : Geometrie I
3. Teil 3 : Geometrie II

Die komplexen Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist definiert durch:

$$z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

wobei gilt, dass:

$$\mathrm{i}^2 = -1$$
$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

Beispiel:

$3 + 5\mathrm{i}$ ist eine komplexe Zahl.

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen, die in $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzen, können in $\mathbb{C}$ gelöst werden.

Beispiel: Löse $x^2 - 2x + 5 = 0$ nach x.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \frac{4\mathrm{i}}{2} = 1 \pm 2\mathrm{i}.$$

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen, die in $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzen, können in $\mathbb{C}$ gelöst werden.

Beispiel: Löse $x^2 - 2x + 5 = 0$ nach x.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} =$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \frac{4\mathrm{i}}{2} = 1 \pm 2\mathrm{i}.$$

Wir werden in der Übung überprüfen, ob diese Lösung auch wirklich richtig ist.

Real- und Imaginärteil

Der Realteil einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ ist definiert als:

$$\mathrm{Re}(z) = a.$$

Der Imaginärteil von z ist:

$$\mathrm{Im}(z) = b.$$

Die komplexen Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist eine Erweiterung der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Jede reelle Zahl kann daher als komplexe Zahl mit Imaginärteil gleich Null aufgefasst werden.

Beispiel:

$$3 \in \mathbb{R} = 3 + 0 \cdot \mathrm{i} \in \mathbb{C}$$

Vergleichen von komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn die Realteile und die Imaginärteile gleich sind.

$$(a + b\mathrm{i}) = (c + d\mathrm{i}) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Rechenbeispiel:

$$(5 + 2\mathrm{i}) = (a + b\mathrm{i}) \Rightarrow a = 5 \wedge b = 2.$$

Addition

Man kann leicht zwei komplexe Zahlen $a + b\mathrm{i}$ und $c + d\mathrm{i}$ addieren, in dem man die Realteile und Imaginärteile addiert:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}.$$

Rechenbeispiel:

$$(3 + 2\mathrm{i}) + (5 + 5\mathrm{i}) = (3 + 5) + (2 + 5)\mathrm{i} = 8 + 7\mathrm{i}.$$

Subtraktion

Das gleiche Prinzip kann man auch bei der Subtraktion anwenden:

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.$$

Rechenbeispiel:

$$(5+5\mathrm{i})-(3+2\mathrm{i})=(5-3)+(5-2)\mathrm{i}=2+3\mathrm{i}.$$

Multiplikation

Bei der Multiplikation zweier Zahlen ergibt sich mit $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$:

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.$$

Rechenbeispiel:

$$(2 + 5\mathrm{i})(3 + 7\mathrm{i}) = (2 \cdot 3 - 5 \cdot 7) + (2 \cdot 7 + 5 \cdot 3)\mathrm{i} = -29 + 29\mathrm{i}.$$

Division

Bei der Division kann man mit einem Trick den Nenner von i befreien:

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}\frac{c-d\mathrm{i}}{c-d\mathrm{i}} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

Rechenbeispiel:

$$\begin{aligned}\frac{2+5\mathrm{i}}{3+7\mathrm{i}} &= \frac{2+5\mathrm{i}}{3+7\mathrm{i}}\frac{3-7\mathrm{i}}{3-7\mathrm{i}} = \frac{(6+35)+(15\mathrm{i}-14\mathrm{i})}{(9+49)+(21\mathrm{i}-21\mathrm{i})}\\ &= \frac{41+\mathrm{i}}{58} = \frac{41}{58} + \frac{1}{58}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag einer komplexen Zahl:

$$|a + b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Rechenbeispiel:

$$|3 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Komplexe Konjugation

Die konjugiert Komplexe einer komplexen Zahl wird wie folgt berechnet:

$$\overline{a + b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}.$$

Dies ist verträglich mit Addition und Multiplikation:

$$\overline{z + y} = \overline{z} + \overline{y}$$

$$\overline{zy} = \overline{z} \cdot \overline{y}.$$

Rückblick Division

Bei der Division kann man mit einem Trick den Nenner von i befreien:

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}\frac{c-d\mathrm{i}}{c-d\mathrm{i}} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

Der Trick bei der Division besteht aus Erweiterung des Bruches mit der konjugiert Komplexen des Nenners.

Übung

Jetzt wird gerechnet!

Rückblick

- $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$
- $(a + b\mathrm{i}) = (c + d\mathrm{i}) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
- $(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$
- $(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$
- $(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$
- $\dfrac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} \rightarrow$ erweitern mit der konjugiert Komplexen.
- $|a + b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\overline{a + b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}$

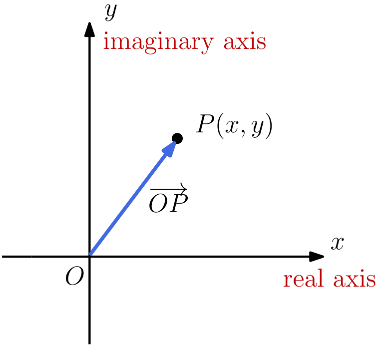
Übersicht

1. Teil 1 : Grundlagen
2. Teil 2 : Geometrie I
3. Teil 3 : Geometrie II

A complex plane - Die Gaußsche Zahlenebene

A complex number $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ can be represented in the plane $\mathbb{R}^2$ as a

- point: $z = P(x, y)$
- vector: $z = \overrightarrow{OP}$.



x-axis is called the *real axis*

y-axis is called the *imaginary axis*

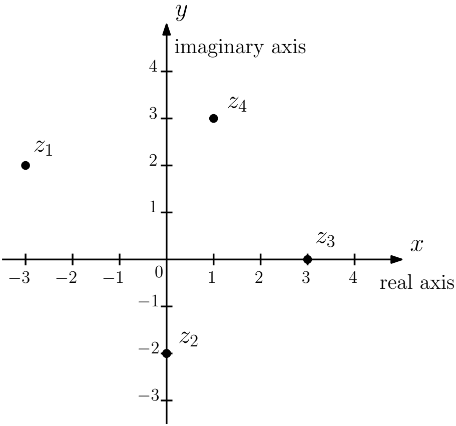
Examples

$$z_1 = -3 + 2\mathrm{i} \quad \rightarrow \quad P(-3, 2)$$

$$z_2 = -2\mathrm{i} \quad \rightarrow \quad P(0, -2)$$

$$z_3 = 3 \quad \rightarrow \quad P(3, 0)$$

$$z_4 = 1 + 3\mathrm{i} \quad \rightarrow \quad P(1, 3)$$



Mod-arg form of a complex number

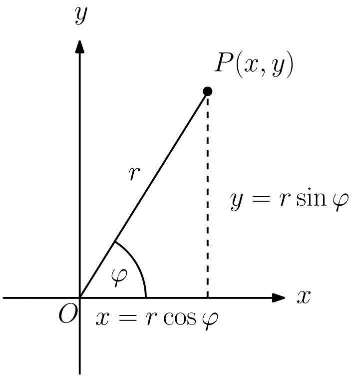
Modulus: $r = \operatorname{mod} z$

distance from the origin

Argument: $\varphi = \arg z$

angle between real axis and vector $\overrightarrow{OP}$

$$\begin{aligned} z &= x + y\mathrm{i} \\ &= r\cos\varphi + r\sin\varphi\ \mathrm{i} \\ &= r(\cos\varphi + \sin\varphi\ \mathrm{i}) \end{aligned}$$

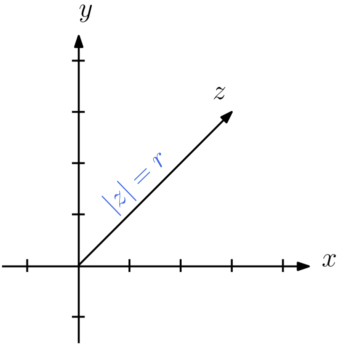


Arithmetic operations and geometry

Absolute value

An absolute value of a complex number is a distance from the origin. In other words, it is the length of the vector.

$$
\begin{aligned}
z &= x + y\mathrm{i} \\
|z| &= \sqrt{z\,\bar{z}} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2} = r
\end{aligned}
$$

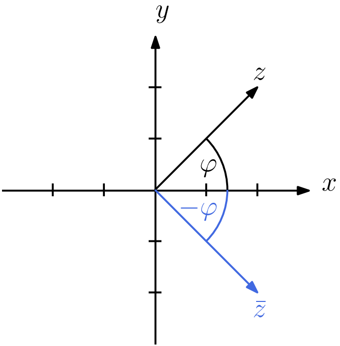


Conjugation

A conjugation of a complex number is reflection across the x-axis.

$$\begin{aligned} z &= x + y\mathrm{i} \\ &= r\cos\varphi + r\sin\varphi\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - y\mathrm{i} \\ &= r\cos\varphi - r\sin\varphi\,\mathrm{i} \\ &= r\cos(-\varphi) + r\sin(-\varphi)\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

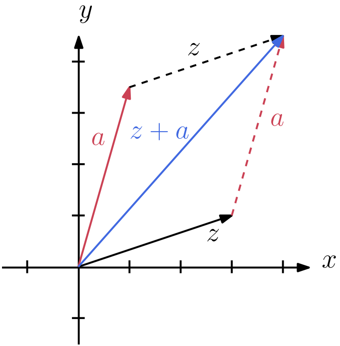


Addition

Adding two complex numbers is like adding two vectors.

$$z = x + y\mathrm{i}, \quad a = a_1 + a_2\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned} z + a &= (x + y\mathrm{i}) + (a_1 + a_2\mathrm{i}) \\ &= (x + a_1) + (y + a_2)\mathrm{i} \end{aligned}$$

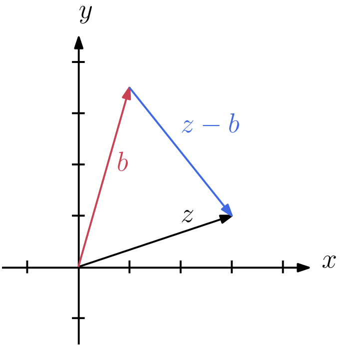


Subtraction

Similarly, subtraction of two complex numbers is like subtracting two vectors.

$z = x + y\mathrm{i}, \quad b = b_1 + b_2\mathrm{i}$

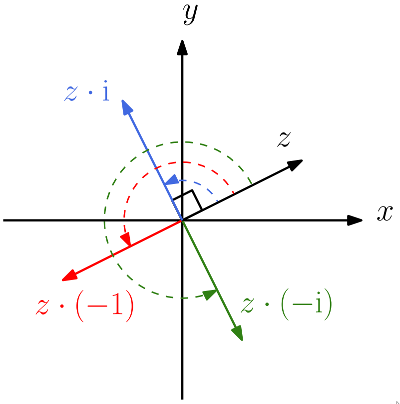
$$\begin{aligned} z - b &= (x + y\mathrm{i}) - (b_1 + b_2\mathrm{i}) \\ &= (x - b_1) + (y - b_2)\mathrm{i} \end{aligned}$$



Multiplication with i, -1 and $-$i

Multiplication of a complex number with i, -1 and $-$i is a rotation of the vector anticlockwise.

$z \cdot \mathrm{i}$	rotation by 90°
$z \cdot (-1)$	rotation by 180°
$z \cdot (-\mathrm{i})$	rotation by 270°



Theorem

- Let A, B and C be three different complex numbers, that form a positively oriented triangle in a complex plane (this means they are marked anticlockwise).
- Let D be a complex number, such that

$$D = C + (A - B) \cdot \mathrm{i}$$

- Connect points A and B with a line p and connect points C and D with a line q.

Theorem

Lines p and q are perpendicular (senkrecht aufeinander stehen) and have the same length.

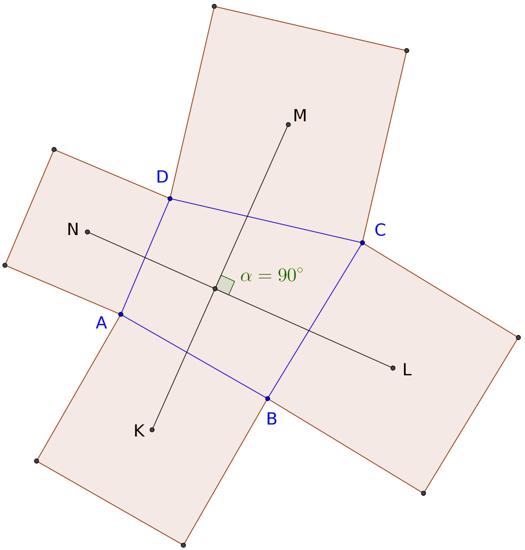
Abel's Theorem

- Draw a general quadrilateral (ein beliebiges Viereck) $\square\, ABCD$.
- Draw a square (Quadrat) above each site.
- Mark the centers of the four squares by K, L, M and N.
- Connect the centers of the opposite squares by lines.

Theorem

The connecting lines are perpendicular and of the same length.

Abel's Theorem



Drawing in GeoGebra!

http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html

Exercises.

Summary

mod-arg form:	$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi \mathrm{i}$
r	distance from the origin (length of the vector z)
φ	angle between real axis and the vector z
$\lvert z\rvert$	distance from the origin (length of the vector z)
$\bar{z}$	reflection of vector z across x-axis
$z \pm a$	vector obtained by adding / subtracting vectors z and a
$z \cdot \mathrm{i},\ z \cdot (-1),\ z \cdot (-\mathrm{i})$	rotations by $90^\circ,\ 180^\circ,\ 270^\circ$

Theorem:
$A, B, C \in \mathbb{C}$, $\triangle ABC$ is positively oriented, $D = C + (B - A) \cdot \mathrm{i}$.
If p is a line connecting A and B and q is a line connecting C and D, then p and q are perpendicular and of the same length.

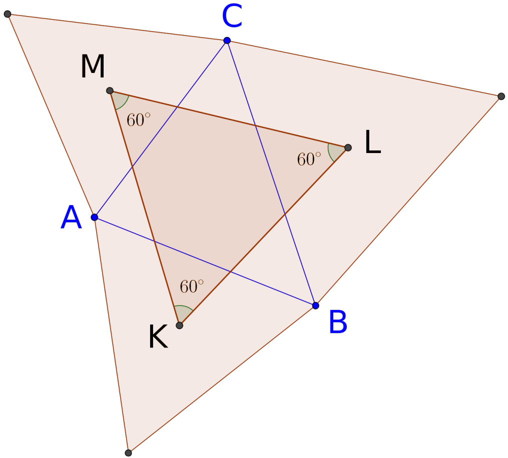
The little sister of Abel's Theorem

- Draw a general triangle (ein beliebiges Dreieck) $\triangle ABC$.
- Draw an equilateral triangle (gleichseitiges Dreieck) above each site.
- Mark the centers of mass (Schwerpunkte) of the three triangles by K, L and M.

Theorem

The triangle $\triangle KLM$ is equilateral.

The little sister of Abel's Theorem



Übersicht

Das Doppelverhältnis

Das Doppelverhältnis (DV) von vier komplexen Zahlen ist definiert durch:

$$\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \frac{\frac{a-c}{a-d}}{\frac{b-c}{b-d}}$$

Im allgemeinen ist das DV eine komplexe Zahl. Es ist reell, falls

- a, b, c, d reell sind,
-
-

∞ ist eine komplexe Zahl:

$$\frac{z}{0} = \infty \text{ falls } z \neq 0, \quad \frac{0}{0} = \text{undefiniert.}$$

Das Doppelverhältnis

Das Doppelverhältnis (DV) von vier komplexen Zahlen ist definiert durch:

$$\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \frac{\frac{a-c}{a-d}}{\frac{b-c}{b-d}}$$

Im allgemeinen ist das DV eine komplexe Zahl. Es ist reell, falls

- a, b, c, d reell sind,
- a, b, c, d rein imaginär sind,
-

∞ ist eine komplexe Zahl:

$$\frac{z}{0} = \infty \text{ falls } z \neq 0, \ \frac{0}{0} = \text{undefiniert.}$$

Das Doppelverhältnis

Das Doppelverhältnis (DV) von vier komplexen Zahlen ist definiert durch:

$$\mathrm{DV}(a, b, c, d) = \frac{\frac{a-c}{a-d}}{\frac{b-c}{b-d}}$$

Im allgemeinen ist das DV eine komplexe Zahl. Es ist reell, falls

- a, b, c, d reell sind,
- a, b, c, d rein imaginär sind,
- wann noch?

∞ ist eine komplexe Zahl:

$$\frac{z}{0} = \infty \text{ falls } z \neq 0, \ \frac{0}{0} = \text{undefiniert.}$$

Operationen, die das DV nicht ändern

$$\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \frac{\frac{a-c}{a-d}}{\frac{b-c}{b-d}}$$

Das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(a,b,c,d)$ ändert sich nicht, wenn wir

- etwas **A**ddieren:
  $\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \mathrm{DV}(a+v, b+v, c+v, d+v)$
-
-

Operationen, die das DV nicht ändern

$$\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \frac{\frac{a-c}{a-d}}{\frac{b-c}{b-d}}$$

Das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(a,b,c,d)$ ändert sich nicht, wenn wir

- etwas **A**ddieren:
  $\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \mathrm{DV}(a+v, b+v, c+v, d+v)$
- mit einer Zahl **M**ultiplizieren:
  $\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \mathrm{DV}(m \cdot a, m \cdot b, m \cdot c, m \cdot d)$
-

Operationen, die das DV nicht ändern

$$\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \frac{\frac{a-c}{a-d}}{\frac{b-c}{b-d}}$$

Das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(a,b,c,d)$ ändert sich nicht, wenn wir

- etwas **A**ddieren:
  $\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \mathrm{DV}(a+v, b+v, c+v, d+v)$
- mit einer Zahl **M**ultiplizieren:
  $\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \mathrm{DV}(m\cdot a, m\cdot b, m\cdot c, m\cdot d)$
- den **K**ehrwert bilden: $\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \mathrm{DV}(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d})$

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}} = \frac{a-c}{a-d}\cdot\frac{d}{c}, \quad \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{d}} = \frac{b-c}{b-d}\cdot\frac{d}{c}$$

Geometrische Bedeutung dieser Operationen:

- **A**: $z \mapsto z + v$ ist die **Verschiebung** um den Vektor v.
- **M**:
- **K**:

Geometrische Bedeutung dieser Operationen:

- **A**: $z \mapsto z + v$ ist die **Verschiebung** um den Vektor v.
- **M**: $z \mapsto m \cdot z$ ist die **Drehung** um $\varphi = \arg m$ zusammengesetzt mit der **zentrischen Streckung** mit dem Faktor $f = \mathrm{mod} m$.
- **K**:

Geometrische Bedeutung dieser Operationen:

- **A**: $z \mapsto z + v$ ist die **Verschiebung** um den Vektor v.
- **M**: $z \mapsto m \cdot z$ ist die **Drehung** um $\varphi = \arg m$ zusammengesetzt mit der **zentrischen Streckung** mit dem Faktor $f = \operatorname{mod} m$.
- **K**: $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ ist die **Spiegelung** an der reellen Achse zusammengesetzt mit der **Spiegelung** am Einheitskreis.

$$\frac{1}{x + y\mathrm{i}} = \overline{\frac{1}{x^2 + y^2}(x + y\mathrm{i})}$$

Kreis*-Gleichungen (KrGln):

$$p \cdot (z \cdot \bar{z}) - \bar{u} \cdot z - u \cdot \bar{z} + q = 0$$

Alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einem Kreis*. Dabei sind $p, q \in \mathbb{R}$, $p \cdot q \leq 1$, $u \in \mathbb{C}$, $u \cdot \bar{u} = 1$

* Geraden sind spezielle Kreise!

Kreis*-Gleichungen (KrGln):

$$p \cdot (z \cdot \bar{z}) - \bar{u} \cdot z - u \cdot \bar{z} + q = 0$$

Alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einem Kreis*. Dabei sind $p, q \in \mathbb{R}$, $p \cdot q \leq 1$, $u \in \mathbb{C}$, $u \cdot \bar{u} = 1$

1. Fall: Für $p \neq 0$ ist das äquivalent zu

$$\underbrace{(z - \frac{u}{p})\overline{(z - \frac{u}{p})}}_{\text{quadrierte Distanz zu } \frac{u}{p}} = \underbrace{\frac{u \cdot \bar{u} - p \cdot q}{p^2}}_{\text{quadrierter Kreisradius}}$$

* Geraden sind spezielle Kreise!

Kreis*-Gleichungen (KrGln):

$$p \cdot (z \cdot \bar{z}) - \bar{u} \cdot z - u \cdot \bar{z} + q = 0$$

Alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einem Kreis*. Dabei sind $p, q \in \mathbb{R}$, $p \cdot q \leq 1$, $u \in \mathbb{C}$, $u \cdot \bar{u} = 1$

1. Fall: Für $p \neq 0$ ist das äquivalent zu

$$\underbrace{(z - \frac{u}{p})\overline{(z - \frac{u}{p})}}_{\text{quadrierte Distanz zu } \frac{u}{p}} \quad = \quad \underbrace{\frac{u \cdot \bar{u} - p \cdot q}{p^2}}_{\text{quadrierter Kreisradius}}$$

2. Fall: Für $p = 0$ ist das eine Geradengleichung. Mit $z = x + \mathrm{i}y$ und $u = v + \mathrm{i}w$ gilt.

$$-(v - \mathrm{i}w)(x + \mathrm{i}y) - (v + \mathrm{i}w)(x - \mathrm{i}y) = -2(v \cdot x + w \cdot y)$$

* Geraden sind spezielle Kreise!

Operationen, die KrGln erhalten:

$$p \cdot (z \cdot \bar{z}) - \bar{u} \cdot z - u \cdot \bar{z} + q = 0$$

Eine KrGl bleibt eine KrGl, wenn wir

- etwas **A**ddieren: $z = z' + v$
- mit einer Zahl **M**ultiplizieren: $z = m \cdot z'$
- den **K**ehrwert bilden: $z = \dfrac{1}{z'}$

$\rightsquigarrow$ wie bei DV!

Operationen, die KrGln erhalten:

$$p \cdot (z \cdot \bar{z}) - \bar{u} \cdot z - u \cdot \bar{z} + q = 0$$

Eine KrGl bleibt eine KrGl, wenn wir

- etwas **A**ddieren: $z = z' + v$
- mit einer Zahl **M**ultiplizieren: $z = m \cdot z'$
- den **K**ehrwert bilden: $z = \dfrac{1}{z'}$

$\rightsquigarrow$ wie bei DV!

K transformiert Geraden ($p = 0$) in Kreise durch 0 ($q = 0$).

Operationen, die KrGln erhalten:

$$p \cdot (z \cdot \bar{z}) - \bar{u} \cdot z - u \cdot \bar{z} + q = 0$$

Eine KrGl bleibt eine KrGl, wenn wir

- etwas **A**ddieren: $z = z' + v$
- mit einer Zahl **M**ultiplizieren: $z = m \cdot z'$
- den **K**ehrwert bilden: $z = \dfrac{1}{z'}$

$\rightsquigarrow$ wie bei DV!

K transformiert Geraden ($p = 0$) in Kreise durch 0 ($q = 0$).

Folgerung

Die AMK–Operationen (Möbius-Transformationen) bilden Kreise* auf Kreise* ab.

Geometrische Bedeutung eines reellen Doppelverhältnisses:

Theorem

Das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(a, b, c, d)$ ist genau dann reell, wenn die vier Punkte a, b, c, d auf einem Kreis* liegen.

Beweis

Geometrische Bedeutung eines reellen Doppelverhältnisses:

Theorem

Das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(a, b, c, d)$ ist genau dann reell, wenn die vier Punkte a, b, c, d auf einem Kreis* liegen.

Beweis

1) Durch AMK-Operationen kann man a, b, c, d in a', b', c', d' transformieren, so dass a', b', c' reell sind. Dazu bildet man den Kreis durch a, b, c in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ab. Das DV ändert sich nicht.

Geometrische Bedeutung eines reellen Doppelverhältnisses:

Theorem

Das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(a, b, c, d)$ ist genau dann reell, wenn die vier Punkte a, b, c, d auf einem Kreis* liegen.

Beweis

1) Durch AMK-Operationen kann man a, b, c, d in a', b', c', d' transformieren, so dass a', b', c' reell sind. Dazu bildet man den Kreis durch a, b, c in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ab. Das DV ändert sich nicht.
2) $\mathrm{DV}(a', b', c', d')$ ist genau dann reell, wenn auch d' reell ist. Dann liegen a', b', c', d' auf einem Kreis*.

Geometrische Bedeutung eines reellen Doppelverhältnisses:

Theorem

Das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(a, b, c, d)$ ist genau dann reell, wenn die vier Punkte a, b, c, d auf einem Kreis* liegen.

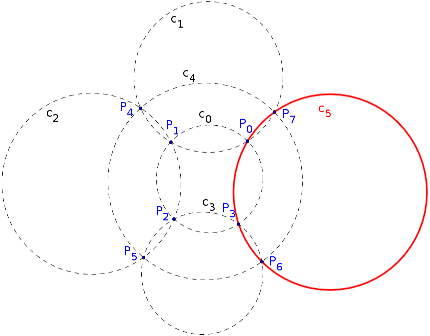
Beweis

1) Durch AMK-Operationen kann man a, b, c, d in a', b', c', d' transformieren, so dass a', b', c' reell sind. Dazu bildet man den Kreis durch a, b, c in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ab. Das DV ändert sich nicht.
2) $\mathrm{DV}(a', b', c', d')$ ist genau dann reell, wenn auch d' reell ist. Dann liegen a', b', c', d' auf einem Kreis*.
3) Da AMK-Operationen umkehrbar sind, liegen genau dann auch a, b, c, d auf einem Kreis*.

Jetzt wird bewiesen!

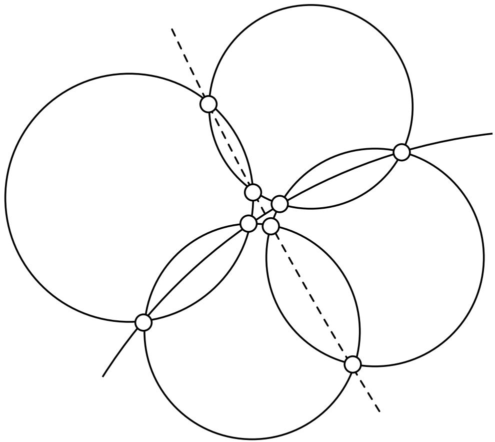
Übung

- Liegen die vier Punkte a, b, c, d und a', b, c, d jeweils auf einem Kreis, dann liegen auch die vier Punkte a, a', c, d auf einem Kreis.
- Satz von Miquel



Und es gibt noch mehr solche Sätze!

Büschelsatz



Rückblick

- $\mathrm{DV}(a,b,c,d) = \dfrac{a-c}{a-d} : \dfrac{b-c}{b-d}$
- a, b, c, d liegen auf einem Kreis* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{DV}(a,b,c,d)$ ist reell.
- Kreisgleichung: $p, q \in \mathbb{R}$, $p \cdot q \leq 1$, $u \in \mathbb{C}$, $u \cdot \bar{u} = 1$

$$p \cdot (z \cdot \bar{z}) - \bar{u} \cdot z - u \cdot \bar{z} + q = 0$$