Signal- und Bildverarbeitung

Roland Wagner

RICAM
JOHANN·RADON·INSTITUTE
FOR COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

9. Jänner 2015

Linz

Überblick

- Generelle Themen in Signal- und Bildverarbeitung
- Probleme in der Praxis
- Inverse Probleme
- Fehler und Fehlerfortpflanzung
- Regularisierung
- Einfache Beispiele
- Weitere Probleme aus dem Alltag

Generelle Themen in Signal- und Bildverarbeitung

- Signal- und Bildrekonstruktion
- Informationen hervorheben / schärfen
- Korrektur (un-)bekannter Fehler
- Kompression
- Objekterkennung
- gemessene, fehlerbehaftete Daten in gesuchte Informationen verwandeln

Darstellung von Bildern und Signalen am Computer

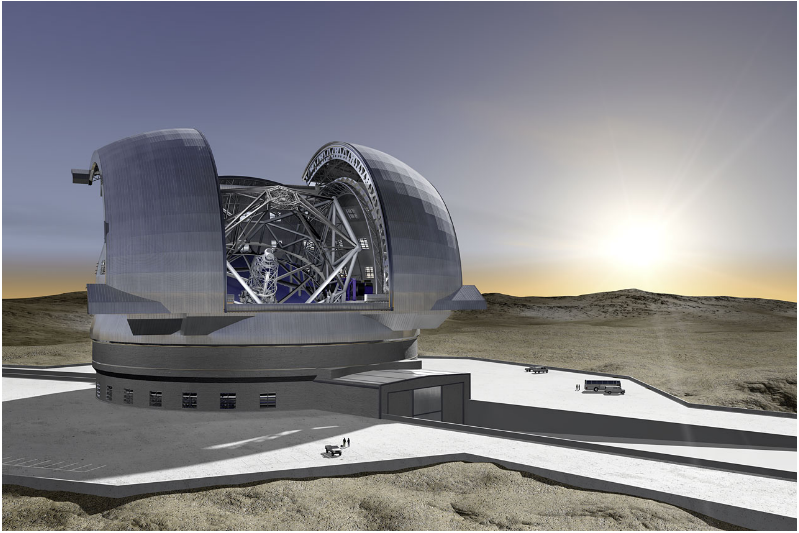
- in Matrix oder Vektor

$$b = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \cdots & f(1,N) \\ f(2,1) & f(2,2) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ f(N,1) & f(N,2) & \cdots & f(N,N) \end{pmatrix}$$

- Intensitäten, zB Farbwerte aus RGB-Modell

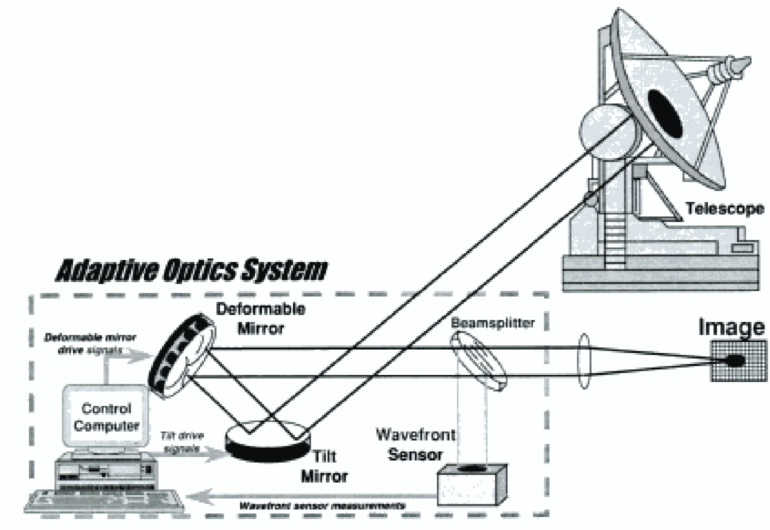
- Transformationen mittels (linearen) Gleichungssystemen
  zB Rotation, Translation, Skalierung, Schärfung
- Möglichkeit im Frequenzbereich zu arbeiten (Fourier-Transformation) – Frequenzen statt Intensitäten

Problem aus der Praxis: E-ELT

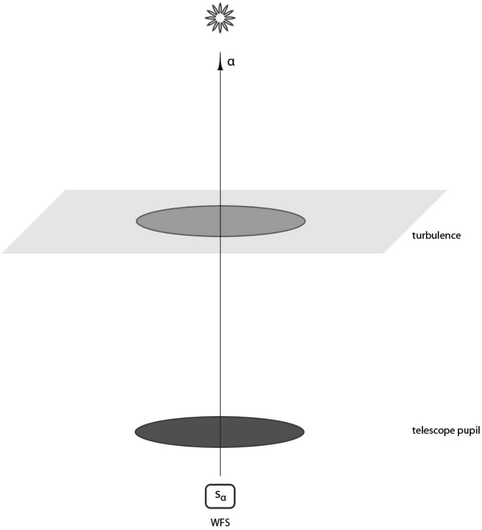


credits: ESO

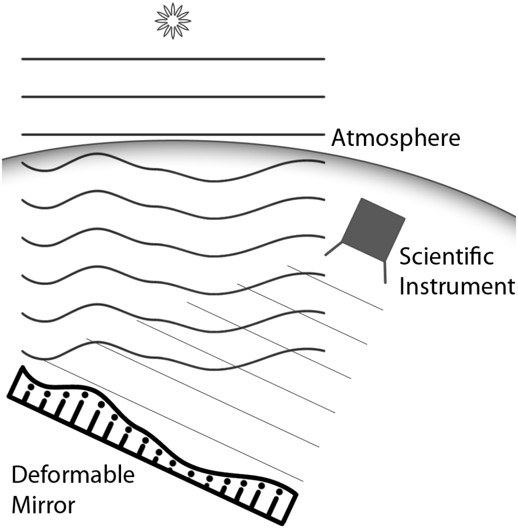
Adaptive Optics



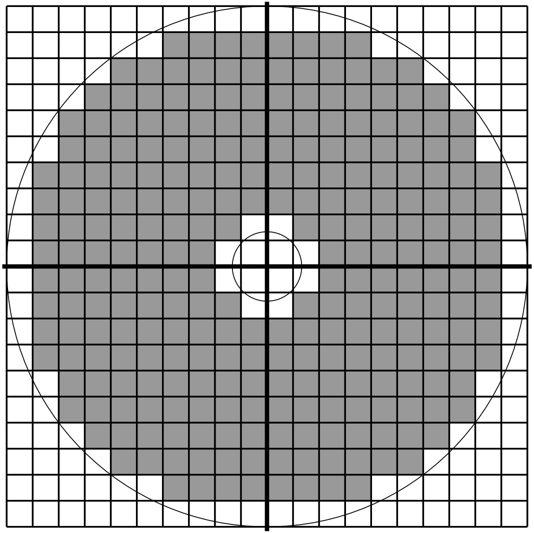
SCAO: Single Conjugate Adaptive Optics



SCAO correction



Subaperture – Messsensoren

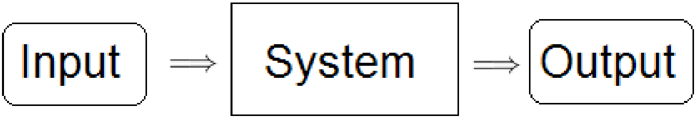


Probleme

- Messwerte sind Ableitungen der gesuchten Funktion
- Messwerte sind fehlerbehaftet
- Ständig neue Messwerte
- Wie lösen?

Inverse Probleme

- Warum Invers?
- Vorwärts vs Inverses Problem



- Welches ist das Vorwärtsproblem und welches das Inverse Problem?

$$
\begin{aligned}
\text{Differentation:} \quad & f(x) \rightsquigarrow f'(x) \\
\text{Integration:} \quad & f'(x) \rightsquigarrow f(x)
\end{aligned}
$$

Gutgestelltheit

- Wann ist ein Problem *gut gestellt*?
- Idee von Hadamard, 1902.
  - Existenz einer Lösung ($\exists$)
  - Eindeutigkeit einer Lösung ($\exists!$)
  - Stabile Abhängigkeit von den Daten
- Nur: was bedeutet das?
- Inverse Probleme sind meist *schlecht gestellt*.
- Was ist also nun das inverse Problem? Differenzieren oder integrieren?

Fehler

- Wie entsteht ein Fehler?
  - zB Messungen
- Betrachte zwei Lösungen $f(x)$ und $f(x_\delta)$, die von verschiedenen Daten x bzw. x_δ bestimmt werden.
- $|f(x) - f(x_\delta)|$ ist der Fehler in der Lösung.
- Welche Arten von Fehlern gibt es beispielsweise?
  - additiv
  - multiplikativ

Fehler

- Haben wir Wissen darüber?
- Warum brauchen wir dieses Wissen?
- Stabilität hängt mit dem Fehler zusammen
  Für verschiedene Daten x, x_δ mit $|x - x_\delta| < \delta$ soll $|f(x) - f(x_\delta)|$ nicht viel größer werden.

Fehler

Können wir nun entscheiden, ob integrieren oder differenzieren schlecht gestellt ist?

JA!

Berechne für $n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{R}^+$:

- $\int f(x)dx$ und $\int f_\delta(x)dx$
- $f'(x)$ und $f_\delta'(x)$
- Seien $n = 100$ und $\delta = 0.01$ - betrachte die Beträge der Differenzen.
- Sind das sinnvolle Werte für n bzw. δ?

Fehler

Können wir nun entscheiden, ob integrieren oder differenzieren schlecht gestellt ist?

JA!

Berechne für $n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{R}^+$:

- $\int f(x)dx$ und $\int f_\delta(x)dx$
- $f'(x)$ und $f_\delta'(x)$
- Seien $n = 100$ und $\delta = 0.01$ - betrachte die Beträge der Differenzen.
- Sind das sinnvolle Werte für n bzw. δ?

Fehler

Können wir nun entscheiden, ob integrieren oder differenzieren schlecht gestellt ist?

JA!

Betrachte für $x \in \mathbb{R}$, δ klein:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f_\delta(x) &= f(x) + \delta \sin(nx) \end{aligned}$$

Berechne für $n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{R}^+$:

- $\int f(x) dx$ und $\int f_\delta(x) dx$
- $f'(x)$ und $f_\delta'(x)$
- Seien $n = 100$ und $\delta = 0.01$ - betrachte die Beträge der Differenzen.
- Sind das sinnvolle Werte für n bzw. δ?

Über- und unterbestimmte Systeme

- Was passiert, wenn die Anzahl an Unbekannten und Gleichungen nicht gleich ist?
- Gibt es trotzdem noch eine sinnvolle Lösung?
- Was heißt hier sinnvoll?
- Möglichst *nahe* am ursprünglichen Problem, aber wie?
- Halte den Fehler klein.
- Problem: Echte Lösung meist nicht bekannt.

Regularisierung

- Idee: Formuliere das Problem als lineares Gleichungssystem $Ax = b$ und halte $\|Ax - b\|$ klein.
- Warum reicht das nicht?
- Fehler in $b \rightsquigarrow b_\delta$ und über- oder unterbestimmtes System.
- Fehlerverstärkung klein halten $\rightsquigarrow$ Fehler bestrafen
- Problem durch ein gutgestelltes Problem annähern
- Die Lösung soll nahe am ursprünglichen Problem sein
- Wie geht das?

Regularisierung

- Betrachte: $Ax = b$, schlecht gestellt bzw. über- oder unterbestimmt.
- Suche ein sinnvolles Funktional $F(x)$
- Berechne $x = \text{argmin} F(x)$
- Probleme?
  - Was ist sinnvoll?
  - Reicht $F(x) = \|Ax - b\|$?
  - Was passiert mit Messfehlern?

Regularisierungsmethoden

- Ideen für $F(x)$?
  - Tikhonov Regularization $\|Ax-b\|^2 + \alpha R(x) \to \min$ mit $R(x) = \|x\|^2$ bzw. $R(x) = TV(x)$
    Idee: Bestrafe Unstetigkeiten, Oszillationen, ...
  - CGNE: Conjugate Gradient for Normal equation
    $$A^T A x = A^T b$$
    Idee: Suche in Richtungen, die normal aufeinander stehen.
  - Stochastischer Ansatz / Bayes:
    Idee: Verwende Kovarianzinformationen über die Lösung und den Fehler im Funktional.
- Iterativ vs nicht iterativ
- Parameterwahl? $\alpha =$?

Zurück zum praktischen Problem

- Gegeben: Ableitungen einer Funktion – gemittelt oder nur an bestimmten Stellen
- Gesucht: Funktion
- Ideen?
  Einfach integrieren?
- Warum nicht? Welche Probleme treten auf?
  Ableitungen nur diskret
  Messfehler
- Aber: Integrieren ist doch eigentlich gut gestellt?
- Probieren wir es aus!

1D CuRe – Cumulative Reconstructor

- Betrachte $[0,1]$ unterteilt in $N = 5$ Teilintervalle mit Länge $h = 0.2$.
- Annahme: Funktion ist stetig, auf jedem Teilintervall linear und $\int_0^1 f(x)dx = 0$.
- Also: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$ und $x_5 = 1$.
- $f(x_i) = f(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx$
- Problem?
  Ableitungen nur diskret
  $f(x_0) =?$. Setze $f(x_0) = 0$
- Diskretisiere: $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx \approx (x_i - x_{i-1})f'(\xi)$ mit $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$
- Berechne also: $f(x_i) = f(x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})f'(\xi)$
- Am Ende: $\sum_{i=1}^{N} h * f(x_i) \approx \int_0^1 f(x)dx \overset{!}{=} 0$

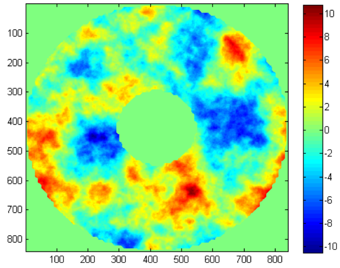
1D CuRe(D) – Cumulative Reconstructor

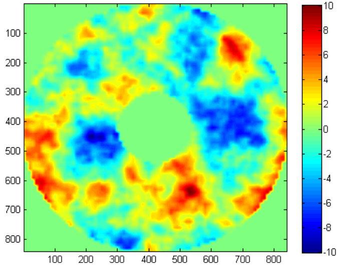
- Also: $x_0 = 0$ und $x = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]$.
- $f_1' = [1, -5, 4.5, 3, -2]$
- $f_2' = [1.2, -5.5, 5.5, 2, -2.3]$
- Linker Sitznachbar: f_1, rechter Sitznachbar f_2
- Lösungen?
- Unterschiede? Fehler? Welche Lösung ist "besser"?
- Was passiert bei längeren Intervallen?
  Arbeite zuerst auf Teilgebieten und verbinde diese am Schluss: Domain decomposition

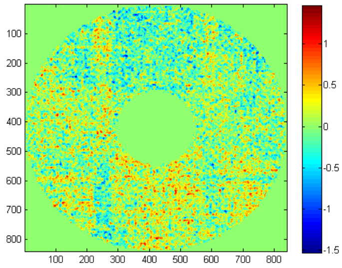
Zurück zum Teleskop

- Daten sind 2D.
- Funktioniert ähnlich durch richtiges Verbinden.
- Viel mehr Daten als in unserem Beispiel.
- Lösen am Computer.
- Rechenaufwand? $20n$ Operationen bei n Daten.
- Schnell und gut genug?

Zurück zum Teleskop







Weitere Beispiele aus dem Alltag

- Computertomographie (CT) – Radon Transformation $\rightsquigarrow$ MATLAB
- Bilder schärfen
- Geologie