

Splines

Vom Gebilde zur Geometrie

Katharina Birner

Institut für Angewandte Geometrie

10.6.2016



Motivation

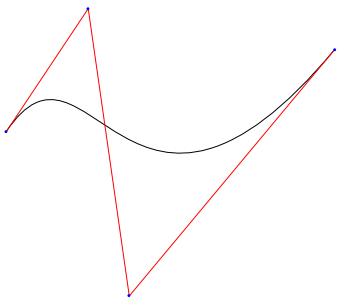


Figure: Bézierkurve

A B C D E F G H I
J K L M N O P Q R
S T U V W X Y X Z

Figure: Schrift

Motivation

Wir wollen etwas in 2D zeichnen.

Was benötigen wir?

→ Geraden

→ Kurven

Motivation

Wir wollen etwas in 2D zeichnen.

Was benötigen wir?

→ Geraden

→ Kurven

Gerade: Anfangs- und Endpunkt + Geradengleichung → sehr einfach

Kurve: Gar nicht so einfach → *Bézierkurven*

- 1 Einführung
- 2 Bézierkurven
 - Basisfunktionen
 - Kontrollpunkte
- 3 Auswertung der Kurve - der de Casteljau Algorithmus
 - Graphische Visualisierung
 - Mathematische Formulierung
- 4 Die ersten Buchstaben
 - Was wissen wir
 - Buchstaben ohne Kurven
 - Buchstaben mit Kurven

Splines

Ein *Spline* ist eine spezielle Art von Funktion.

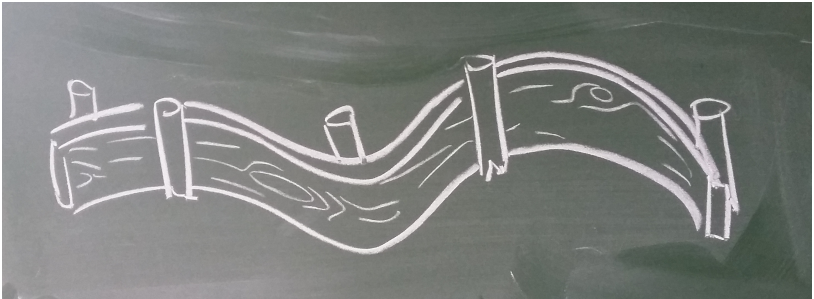
Wir behandeln nur Splines in 2D, in diesem Fall ist es eine Darstellung für Kurven.

Allgemein bezeichnet ein Spline eine zusammengesetzte Kurve. Das heißt, dass man beliebig viele Segmente verwendet um die gewünschte Kurve darzustellen.

Wir konzentrieren uns heute auf eine bestimmte Art von Splines, die zwei-dimensionalen Bézier-Splines. Diese nennt man meistens *Bézierkurven*.

Splines

Der Begriff Spline kommt ursprünglich aus dem Schiffbau. Dort wurden lange dünne Latten, genauer gesagt Straklatten (englisch: splines), an einzelnen Punkten fixiert. Die Latten haben sich dann so verbogen, dass die Spannung minimal wurde und das entspricht genau einem (kubischen) Spline wie wir ihn heute in der Mathematik verwenden.



Bézierkurven verlaufen von einem Anfangs- zu einem Endpunkt, die Krümmung wird durch Zwischenpunkte beeinflusst.

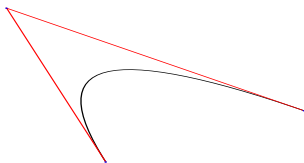


Figure: Quadratische Bézierkurve

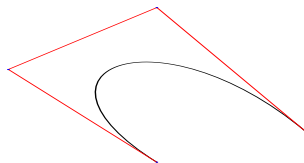


Figure: Kubische Bézierkurve

Funktionen

Es gibt verschiedene Arten Funktionen darzustellen.
Als Beispiel verwenden wir die Beschreibung des Einheitskreises.

Funktionen

Es gibt verschiedene Arten Funktionen darzustellen.

Als Beispiel verwenden wir die Beschreibung des Einheitskreises.

- **Implizite Darstellung:** $F(x, y) = 0$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

- **Explizite Darstellung:** $y = f(x)$

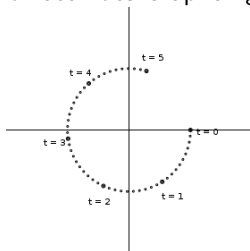
$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

- **Parameterdarstellung:** $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Parameterfunktionen

Wir verwenden nun Funktionen in Parameterdarstellung.
Diese drücken nicht die y -Koordinate bezüglich der x -Koordinate aus.
Sie binden die Koordinaten an eine “Kontrollvariable” t .
Ändert man diese Variable, so erhält man nicht einen Wert, sondern zwei,
welche wiederum als Koordinaten des Graphen gesehen werden können.



- 1 Einführung
- 2 Bézierkurven
 - Basisfunktionen
 - Kontrollpunkte
- 3 Auswertung der Kurve - der de Casteljau Algorithmus
 - Graphische Visualisierung
 - Mathematische Formulierung
- 4 Die ersten Buchstaben
 - Was wissen wir
 - Buchstaben ohne Kurven
 - Buchstaben mit Kurven

Polynome

Bézierkurven sind Parameterfunktionen, allerdings haben sie in allen Dimensionen dieselbe Basisfunktion!

Als Basisfunktionen verwendet man hier die *Polynome*.

Was ist das?

Polynome

Bézierkurven sind Parameterfunktionen, allerdings haben sie in allen Dimensionen dieselbe Basisfunktion!

Als Basisfunktionen verwendet man hier die *Polynome*.

Was ist das?

Allgemeine Polynome: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bézierkurven sind Polynome in t statt in x . Dabei ist t stets aus dem Intervall $[0, 1]$.

Binomische Formel

Der bekannteste Spezialfall der binomischen Formel ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Die allgemeine Version lautet

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ und $j! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (j-1) \cdot j$.

Basisfunktionen

Betrachtet man nun die einzelnen Elemente der Summe

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

und setzt $a = (1 - t)$ bzw. $b = t$, so erhält man die sogenannten *Bernsteinpolynome*. Diese sind die Basisfunktionen einer Bézierkurve.

Basisfunktionen

Betrachtet man nun die einzelnen Elemente der Summe

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

und setzt $a = (1 - t)$ bzw. $b = t$, so erhält man die sogenannten *Bernsteinpolynome*. Diese sind die Basisfunktionen einer Bézierkurve.

Für $n = 1, 2, 3$ sieht eine Basis dann folgendermaßen aus:

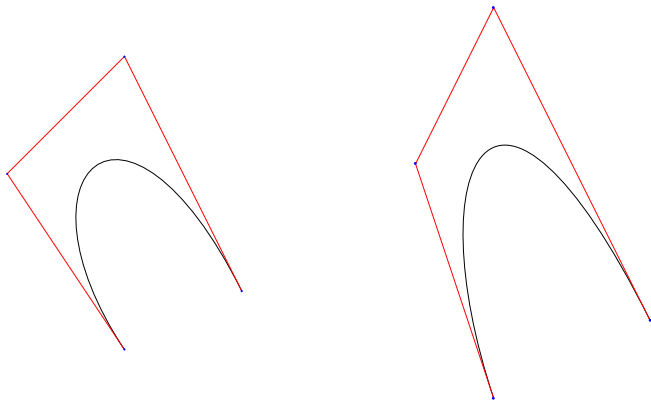
linear: $(1 - t), t$,

quadratisch: $(1 - t)^2, 2(1 - t)t, t^2$,

kubisch: $(1 - t)^3, 3(1 - t)^2t, 3(1 - t)t^2, t^3$.

- 1 Einführung
- 2 Bézierkurven
 - Basisfunktionen
 - **Kontrollpunkte**
- 3 Auswertung der Kurve - der de Casteljau Algorithmus
 - Graphische Visualisierung
 - Mathematische Formulierung
- 4 Die ersten Buchstaben
 - Was wissen wir
 - Buchstaben ohne Kurven
 - Buchstaben mit Kurven

Figure: kubische Bézierkurven



Zwei kubische Bézierkurven haben dieselben Basisfunktionen.

Worin unterscheiden sie sich?

Durch ihre *Kontrollpunkte*.

Wie der Name schon sagt, kontrollieren sie etwas und zwar sowohl den Anfang und das Ende der Kurve, als auch ihre Krümmung.

Zwei kubische Bézierkurven haben dieselben Basisfunktionen.

Worin unterscheiden sie sich?

Durch ihre *Kontrollpunkte*.

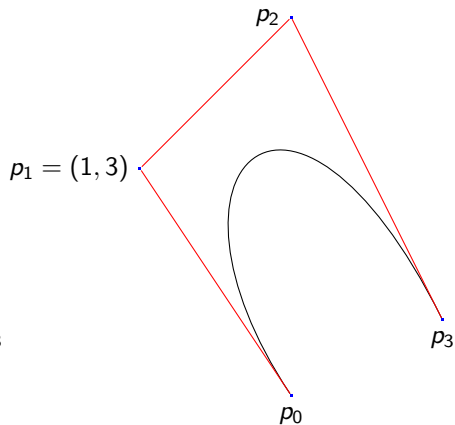
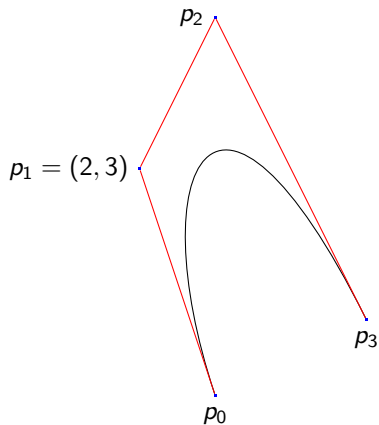
Wie der Name schon sagt, kontrollieren sie etwas und zwar sowohl den Anfang und das Ende der Kurve, als auch ihre Krümmung.

Unter Verwendung der Kontrollpunkte und der Basisfunktionen können wir nun die allgemeine Formel einer Bézierkurve vom Grad n angeben.

$$C^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \cdot p_i, \quad t \in [0, 1],$$

wobei p_0 der Anfangspunkt, p_n der Endpunkt und $p_j, j \in 1, \dots, n-1$ die Zwischenpunkte sind.

Verbindet man die einzelnen Kontrollpunkte erhält man das *Kontrollpolygon*.



- 1 Einführung
- 2 Bézierkurven
 - Basisfunktionen
 - Kontrollpunkte
- 3 Auswertung der Kurve - der de Casteljau Algorithmus
 - Graphische Visualisierung
 - Mathematische Formulierung
- 4 Die ersten Buchstaben
 - Was wissen wir
 - Buchstaben ohne Kurven
 - Buchstaben mit Kurven

Algorithmus

Wenn wir eine Bézierkurve zeichnen wollen, können wir jeden Wert von $t \in [0, 1]$ in die Kurvengleichung einsetzen und die Koordinaten berechnen. Im Falle von komplexen Kurven ist das aber sehr aufwendig. Gibt es eine andere Möglichkeit?

Algorithmus

Wenn wir eine Bézierkurve zeichnen wollen, können wir jeden Wert von $t \in [0, 1]$ in die Kurvengleichung einsetzen und die Koordinaten berechnen. Im Falle von komplexen Kurven ist das aber sehr aufwendig. Gibt es eine andere Möglichkeit?

Ja, den *Algorithmus von de Casteljau*.

Was ist ein Algorithmus?

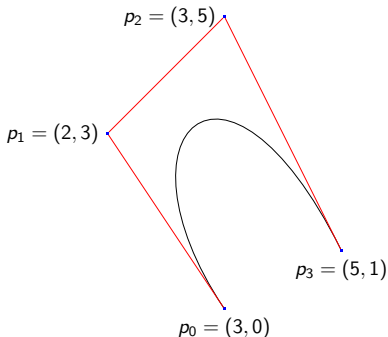
Ein Algorithmus besteht nicht nur aus einer einzigen Formel, es ist eine eindeutige Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems oder einer Klasse von Problemen. Er besteht aus endlich vielen Teilschritten und überführt eine bestimmte Eingabe in eine bestimmte Ausgabe.

- 1 Einführung
- 2 Bézierkurven
 - Basisfunktionen
 - Kontrollpunkte
- 3 Auswertung der Kurve - der de Casteljau Algorithmus
 - Graphische Visualisierung
 - Mathematische Formulierung
- 4 Die ersten Buchstaben
 - Was wissen wir
 - Buchstaben ohne Kurven
 - Buchstaben mit Kurven

Graphische Darstellung des Algorithmus von de Casteljau

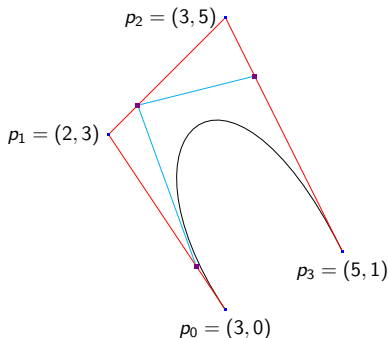
Wir wollen also nun für eine bestimmte Wahl des Parameters $t \in [0, 1]$ den zugehörigen Punkt auf der Kurve berechnen.

Betrachten wir zuerst graphisch, wie der Algorithmus für $t = 0.25$ funktioniert:



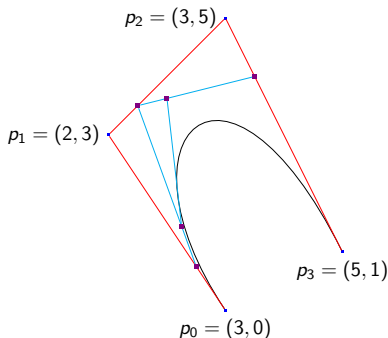
Graphische Darstellung des Algorithmus von de Casteljau

Wir markieren nun auf jeder Linie des Kontrollpolygons jenen Punkt, der t -weit von den zugehörigen Kontrollpunkten entfernt liegt. In unserem Fall also 25% entfernt vom Anfangspunkt und 75% vom Endpunkt der Linie.



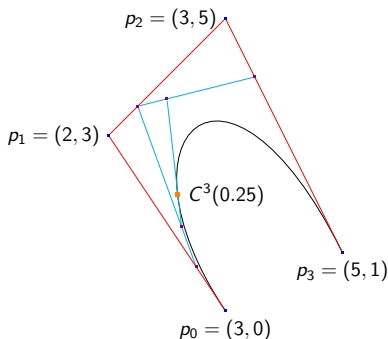
Graphische Darstellung des Algorithmus von de Casteljau

Das Kontrollpolygon besteht aus drei Linien. Nun erhalten wir im ersten Schritt des Algorithmus zwei neue Linien. Wir wiederholen dieses Schema, bis nur noch eine Linie gezeichnet werden muss.



Graphische Darstellung des Algorithmus von de Casteljau

Diese Linie berührt nun die Bézierkurve in genau jenem Punkt, der wiederum t -weit vom Anfangspunkt von $(1 - t)$ -weit vom Endpunkt dieser Linie entfernt liegt. Das ist der Kurvenpunkt für $t = 0.25$ dieser Bézierkurve, den wir auch bei Einsetzen in die Kurvengleichung für $t = 0.25$ erhalten hätten.



- 1 Einführung
- 2 Bézierkurven
 - Basisfunktionen
 - Kontrollpunkte
- 3 Auswertung der Kurve - der de Casteljau Algorithmus
 - Graphische Visualisierung
 - **Mathematische Formulierung**
- 4 Die ersten Buchstaben
 - Was wissen wir
 - Buchstaben ohne Kurven
 - Buchstaben mit Kurven

Notation

Um den Algorithmus von Casteljau mathematisch zu formulieren, müssen wir zuerst die Notation betrachten, also wie wir bestimmte Objekte bezeichnen.

Notation

Um den Algorithmus von Casteljau mathematisch zu formulieren, müssen wir zuerst die Notation betrachten, also wie wir bestimmte Objekte bezeichnen.

- Nachdem wir im Folgenden oft mit kubischen Bézierkurven, also $n = 3$, arbeiten, bezeichnen wir die Kurve als $C(t)$. Sollten wir einen anderen Grad verwenden, geben wir diesen spezifisch an.
- Die ursprünglichen Kontrollpunkte erhalten einen weiteren Index, der angibt, dass sie als Input des Algorithmus fungieren: $p_i = p_i^0$.
- Jene Punkte, die im Algorithmus berechnet werden, erhalten als oberen Index jene Zahl, die sich auf den Durchlauf des Algorithmus bezieht: Punkte im ersten Durchlauf werden mit p_i^1 bezeichnet etc.

Algorithmus von de Casteljau

Mit Hilfe dieser Notation können wir den Algorithmus von Casteljau nun mathematisch korrekt angeben.

Algorithm 1 de Casteljau Algorithmus

Input: Kontrollpunkte $p_i^0, i = 0, \dots, n$, Parameter t

1: $j = 1$

2: **while** $j \leq n$ **do**

3: $p_i^j = t p_i^{j-1} + (1 - t) p_{i+1}^{j-1}, \quad i = 0, \dots, n - j$

4: $j = j + 1$

5: **end while**

Output: $p_0^n = C^n(t)$

- 1 Einführung
- 2 Bézierkurven
 - Basisfunktionen
 - Kontrollpunkte
- 3 Auswertung der Kurve - der de Casteljau Algorithmus
 - Graphische Visualisierung
 - Mathematische Formulierung
- 4 Die ersten Buchstaben
 - **Was wissen wir**
 - Buchstaben ohne Kurven
 - Buchstaben mit Kurven

Wir wissen also mittlerweile

- wie eine Bézierkurve definiert ist, mit
 - Basisfunktionen und
 - Kontrollpunkten,
- wie man die Kurve an einem bestimmten Punkt auswertet (Algorithmus von de Casteljau).

Wir wissen also mittlerweile

- wie eine Bézierkurve definiert ist, mit
 - Basisfunktionen und
 - Kontrollpunkten,
- wie man die Kurve an einem bestimmten Punkt auswertet (Algorithmus von de Casteljau).

Was benötigen wir?

- i Geraden
- ii Kurven

- 1 Einführung
- 2 Bézierkurven
 - Basisfunktionen
 - Kontrollpunkte
- 3 Auswertung der Kurve - der de Casteljau Algorithmus
 - Graphische Visualisierung
 - Mathematische Formulierung
- 4 Die ersten Buchstaben
 - Was wissen wir
 - **Buchstaben ohne Kurven**
 - Buchstaben mit Kurven

Das N

Die einfachsten Buchstaben sind jene, die wir ohne Hilfe von Kurven darstellen können.

Einer davon ist das **N**. Also sehen wir uns diesen näher an.

Das N

Die einfachsten Buchstaben sind jene, die wir ohne Hilfe von Kurven darstellen können.

Einer davon ist das **N**. Also sehen wir uns diesen näher an.

Geraden können bereits mit linearen Bézierkurven ($n = 1$) dargestellt werden.

$$C^1(t) = (1 - t)p_0 + tp_1, \quad t \in [0, 1].$$

Das N

Die einfachsten Buchstaben sind jene, die wir ohne Hilfe von Kurven darstellen können.

Einer davon ist das **N**. Also sehen wir uns diesen näher an.

Geraden können bereits mit linearen Bézierkurven ($n = 1$) dargestellt werden.

$$C^1(t) = (1 - t)p_0 + tp_1, \quad t \in [0, 1].$$

Natürlich kann man auch einen höheren Grad wählen, wobei dann die Zwischenpunkte entweder mit dem Anfangs- oder Endpunkt zusammenfallen müssen, oder kollinear dazu liegen müssen. Das heißt, dass sie auf der Gerade zwischen den beiden Punkten liegen.

Das N

Der Buchstabe **N** besteht aus drei Linien, dabei sollte man folgendes beachten.

Das N

Der Buchstabe **N** besteht aus drei Linien, dabei sollte man folgendes beachten.

Natürlich sollten diese Linien immer einen Anfangs- und Endpunkt gemeinsam haben, damit keine Löcher entstehen.

Das N

Der Buchstabe **N** besteht aus drei Linien, dabei sollte man folgendes beachten.

Natürlich sollten diese Linien immer einen Anfangs- und Endpunkt gemeinsam haben, damit keine Löcher entstehen.

Außerdem sollten die erste und letzte Linie parallel zueinander sein.

Was bedeutet das im Gesamten?

Das N

Der Buchstabe **N** besteht aus drei Linien, dabei sollte man folgendes beachten.

Natürlich sollten diese Linien immer einen Anfangs- und Endpunkt gemeinsam haben, damit keine Löcher entstehen.

Außerdem sollten die erste und letzte Linie parallel zueinander sein.

Was bedeutet das im Gesamten?

Eigentlich genügt es, nur die erste Linie zu wählen, also ihren Anfangs- und Endpunkt.

Die letzte Linie ergibt sich als Parallelverschiebung (ich addiere etwas zu den x -Koordinaten der beiden Punkte).

Die verbindende mittlere Linie geht dann vom Endpunkt der ersten Linie zum Anfangspunkt der zweiten Linie!

Buchstaben in Mathematica

Wie also würde das **N** in Mathematica dargestellt werden?

Buchstaben in Mathematica

Wie also würde das **N** in Mathematica dargestellt werden?

Mathematica ist eines der meistbenutzten mathematischen Programmpakete.

Man kann damit sowohl symbolisch rechnen (Rechnen mit Variablen), als auch numerisch (approximativ).

Außerdem enthält es ein Visualisierungs-Tool um Graphen in 2D oder 3D darzustellen.

Buchstaben in Mathematica

Wie also würde das **N** in Mathematica dargestellt werden?

Mathematica ist eines der meistbenutzten mathematischen Programmpakete.

Man kann damit sowohl symbolisch rechnen (Rechnen mit Variablen), als auch numerisch (approximativ).

Außerdem enthält es ein Visualisierungs-Tool um Graphen in 2D oder 3D darzustellen.

Versuchen wir also den Buchstaben **N** in Mathematica darzustellen.

Buchstaben in Mathematica

Wie also würde das **N** in Mathematica dargestellt werden?

Mathematica ist eines der meistbenutzten mathematischen Programmpakete.

Man kann damit sowohl symbolisch rechnen (Rechnen mit Variablen), als auch numerisch (approximativ).

Außerdem enthält es ein Visualisierungs-Tool um Graphen in 2D oder 3D darzustellen.

Versuchen wir also den Buchstaben **N** in Mathematica darzustellen.

Was ist, falls man keine senkrechten Linien haben möchte, ändert sich an der Konstruktion etwas?

Buchstaben in Mathematica

Wie also würde das **N** in Mathematica dargestellt werden?

Mathematica ist eines der meistbenutzten mathematischen Programmpakete.

Man kann damit sowohl symbolisch rechnen (Rechnen mit Variablen), als auch numerisch (approximativ).

Außerdem enthält es ein Visualisierungs-Tool um Graphen in 2D oder 3D darzustellen.

Versuchen wir also den Buchstaben **N** in Mathematica darzustellen.

Was ist, falls man keine senkrechten Linien haben möchte, ändert sich an der Konstruktion etwas?

NEIN!

- 1 Einführung
- 2 Bézierkurven
 - Basisfunktionen
 - Kontrollpunkte
- 3 Auswertung der Kurve - der de Casteljau Algorithmus
 - Graphische Visualisierung
 - Mathematische Formulierung
- 4 Die ersten Buchstaben
 - Was wissen wir
 - Buchstaben ohne Kurven
 - Buchstaben mit Kurven

Es gibt Buchstaben die

- aus Geraden und Kurven bestehen, z.B. **P** und
- die nur aus Kurven bestehen, z.B. **O**.

Beginnen wir mit dem ersten Fall und verwenden wir den Buchstaben **P** als Beispiel.

Was müssen wir beachten?

Es gibt Buchstaben die

- aus Geraden und Kurven bestehen, z.B. **P** und
- die nur aus Kurven bestehen, z.B. **O**.

Beginnen wir mit dem ersten Fall und verwenden wir den Buchstaben **P** als Beispiel.

Was müssen wir beachten?

In diesem Fall sollte die Gerade eher senkrecht sein.

Wir müssen uns überlegen, wie wir die Kurve platzieren wollen (wie weit soll sie hinuntergehen).

Die Kurve selbst sollte symmetrisch sein, wir müssen die Kontrollpunkte also speziell wählen.

P in Mathematica

Zuerst konstruieren wir uns eine Gerade, wie zuvor.

Versuchen wir nun, die Kurve so zu platzieren, dass sie vom Endpunkt der Gerade zur Mitte der Gerade läuft.

Wie können wir das machen?

P in Mathematica

Zuerst konstruieren wir uns eine Gerade, wie zuvor.

Versuchen wir nun, die Kurve so zu platzieren, dass sie vom Endpunkt der Gerade zur Mitte der Gerade läuft.

Wie können wir das machen?

Wir können den Algorithmus von de Casteljau auf die lineare Bézierkurve mit $t = 0.5$ anwenden.

Damit haben wir den Anfangs- und Endpunkt der Kurve. In diesem Fall sollten wir wieder eine kubische Bézierkurve verwenden.

Wie wählen wir die beiden Zwischenpunkte?

P in Mathematica

Zuerst konstruieren wir uns eine Gerade, wie zuvor.

Versuchen wir nun, die Kurve so zu platzieren, dass sie vom Endpunkt der Gerade zur Mitte der Gerade läuft.

Wie können wir das machen?

Wir können den Algorithmus von de Casteljau auf die lineare Bézierkurve mit $t = 0.5$ anwenden.

Damit haben wir den Anfangs- und Endpunkt der Kurve. In diesem Fall sollten wir wieder eine kubische Bézierkurve verwenden.

Wie wählen wir die beiden Zwischenpunkte?

Wir müssen sie symmetrisch anordnen. Dafür wählen wir für beide Punkte dieselbe x -Koordinate.

Die y -Koordinate erhalten wir, indem wir den Abstand d zwischen Anfangs- und Endpunkt dritteln und für die y -Koordinate des ersten Zwischenpunktes $p_{0y} - \frac{1}{3}d$ und des zweiten Punktes $p_{0y} - \frac{2}{3}d$ wählen.

P in Mathematica

Zuerst konstruieren wir uns eine Gerade, wie zuvor.

Versuchen wir nun, die Kurve so zu platzieren, dass sie vom Endpunkt der Gerade zur Mitte der Gerade läuft.

Wie können wir das machen?

Wir können den Algorithmus von de Casteljau auf die lineare Bézierkurve mit $t = 0.5$ anwenden.

Damit haben wir den Anfangs- und Endpunkt der Kurve. In diesem Fall sollten wir wieder eine kubische Bézierkurve verwenden.

Wie wählen wir die beiden Zwischenpunkte?

Wir müssen sie symmetrisch anordnen. Dafür wählen wir für beide Punkte dieselbe x -Koordinate.

Die y -Koordinate erhalten wir, indem wir den Abstand d zwischen Anfangs- und Endpunkt dritteln und für die y -Koordinate des ersten Zwischenpunktes $p_{0y} - \frac{1}{3}d$ und des zweiten Punktes $p_{0y} - \frac{2}{3}d$ wählen.

Ein Anfang, aber nicht wirklich schön!

R in Mathematica

Versucht nun selbst eine zusätzliche Gerade hinzuzufügen, um somit aus dem **P** ein **R** zu machen!

Fallen euch hierbei zusätzliche Probleme auf?

R in Mathematica

Versucht nun selbst eine zusätzliche Gerade hinzuzufügen, um somit aus dem **P** ein **R** zu machen!

Fallen euch hierbei zusätzliche Probleme auf?

Der Anfangspunkt der letzten Gerade ist offensichtlich der Endpunkt der Kurve.

Aber wie setze ich den Endpunkt dieser Gerade?

O in Mathematica

Der Buchstabe **O** besteht nur aus Kurven. Nun kann man überlegen, aus wievielen man den Buchstaben zusammensetzt.

Versuchen wir es mit zwei kubischen Bézierkurven.

Was muss beachtet werden?

O in Mathematica

Der Buchstabe **O** besteht nur aus Kurven. Nun kann man überlegen, aus wievielen man den Buchstaben zusammensetzt.

Versuchen wir es mit zwei kubischen Bézierkurven.

Was muss beachtet werden?

Natürlich sollten der Anfangspunkt der einen Kurve mit dem Endpunkt der anderen übereinstimmen.

Beide Kurven sollten wieder symmetrisch gewählt werden.

Außerdem sollte die eine Kurve eine Spiegelung der anderen sein, um ein gleichmäßiges **O** zu erhalten.

O in Mathematica

Der Buchstabe **O** besteht nur aus Kurven. Nun kann man überlegen, aus wievielen man den Buchstaben zusammensetzt.

Versuchen wir es mit zwei kubischen Bézierkurven.

Was muss beachtet werden?

Natürlich sollten der Anfangspunkt der einen Kurve mit dem Endpunkt der anderen übereinstimmen.

Beide Kurven sollten wieder symmetrisch gewählt werden.

Außerdem sollte die eine Kurve eine Spiegelung der anderen sein, um ein gleichmäßiges **O** zu erhalten.

Das ist es noch nicht wirklich.

Buchstaben mit Kurven in Mathematica

Wir sehen, dass es beim Konstruieren von Buchstaben mit Kurven zu mehreren Problemen kommt.

Buchstaben mit Kurven in Mathematica

Wir sehen, dass es beim Konstruieren von Buchstaben mit Kurven zu mehreren Problemen kommt.

P Wie kann ich meine Kurve optimal konstruieren?

Buchstaben mit Kurven in Mathematica

Wir sehen, dass es beim Konstruieren von Buchstaben mit Kurven zu mehreren Problemen kommt.

- P Wie kann ich meine Kurve optimal konstruieren?
- R Wie wähle ich den Endpunkt der zusätzlichen Geraden?

Buchstaben mit Kurven in Mathematica

Wir sehen, dass es beim Konstruieren von Buchstaben mit Kurven zu mehreren Problemen kommt.

- P Wie kann ich meine Kurve optimal konstruieren?
- R Wie wähle ich den Endpunkt der zusätzlichen Geraden?
- O Wie wähle ich optimale Kurven?
- O Wie setze ich diese “schön” zusammen?
- O Wieviele Kurven soll ich verwenden?

5 Die optimale Kurve

- Wahl der Kurve
- Approximation eines Viertelkreises
- Viertelkreise in anderen Buchstaben
- Offene Fragen

6 Extremwert einer Kurve

- Definition
- Der Buchstabe R

7 Ableitung einer Bézierkurve

- Ableiten der Bézierkurve
- Tangente der Kurve

Der Kreis

Was genau stört uns eigentlich bei den Kurven, die wir bisher verwendet haben?

Sie sind nicht “rund genug”. Insbesondere im Falle des **O** würden wir gerne etwas Ähnliches zu einem Kreis haben.

Der Kreis

Was genau stört uns eigentlich bei den Kurven, die wir bisher verwendet haben?

Sie sind nicht “rund genug”. Insbesondere im Falle des **O** würden wir gerne etwas Ähnliches zu einem Kreis haben.

Schlechte Nachricht: Mit Bézierkurven lassen sich keine Kreise darstellen!

Gute Nachricht: Man kann eine Kreis aber annähern!

Genauer gesagt nähert man am Besten mit kubischen Bézierkurven einen Viertelkreis an.

5 Die optimale Kurve

- Wahl der Kurve
- **Approximation eines Viertelkreises**
- Viertelkreise in anderen Buchstaben
- Offene Fragen

6 Extremwert einer Kurve

- Definition
- Der Buchstabe R

7 Ableitung einer Bézierkurve

- Ableiten der Bézierkurve
- Tangente der Kurve

Die Herleitung der dafür notwendigen Formel ist etwas technisch und kann hier nachgesehen werden:

`www.pomax.github.io/bezierinfo`

Die Herleitung der dafür notwendigen Formel ist etwas technisch und kann hier nachgesehen werden:

www.pomax.github.io/bezierinfo

Das Ergebnis ist aber eine einfache Formel, die angibt wie man die Kontrollpunkte wählen muss.

Angenommen wir wollen einen Viertelkreis mit Mittelpunkt $M = (0, 0)$ und Radius r approximieren.

Für den oberen rechten Viertelkreis setzt man den Anfangspunkt auf $p_0 = (r, 0)$, den Endpunkt auf $p_3 = (0, r)$.

Die Kontrollpunkte erhält man durch

$$p_1 = p_0 + 0.552(p_3 - M) \text{ und}$$

$$p_2 = p_3 + 0.552(M - p_0).$$

P Version 2.0

Wie kann ich das nun auf den Buchstaben **P** anwenden?

Zuerst muss ich mir überlegen, wo der Mittelpunkt des Halbkreises, den ich durch zwei Viertelkreise darstellen möchte, liegt und welchen Radius der Halbkreis dann haben wird.

P Version 2.0

Wie kann ich das nun auf den Buchstaben **P** anwenden?

Zuerst muss ich mir überlegen, wo der Mittelpunkt des Halbkreises, den ich durch zwei Viertelkreise darstellen möchte, liegt und welchen Radius der Halbkreis dann haben wird.

Der Mittelpunkt M liegt genau zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve. Der Radius r ist dann die Strecke von M zu einem der beiden Punkte.

Wo liegt nun der Punkt, der den Halbkreis in zwei Viertelkreise teilt?

P Version 2.0

Wie kann ich das nun auf den Buchstaben **P** anwenden?

Zuerst muss ich mir überlegen, wo der Mittelpunkt des Halbkreises, den ich durch zwei Viertelkreise darstellen möchte, liegt und welchen Radius der Halbkreis dann haben wird.

Der Mittelpunkt M liegt genau zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve. Der Radius r ist dann die Strecke von M zu einem der beiden Punkte.

Wo liegt nun der Punkt, der den Halbkreis in zwei Viertelkreise teilt?

Er liegt in x -Richtung genau r weit von M entfernt. Die y -Koordinate ist dieselbe wie bei M .

Damit haben wir alle nötigen Informationen und wir können die Formel anwenden und graphisch darstellen.

P Version 2.0

Wie kann ich das nun auf den Buchstaben **P** anwenden?

Zuerst muss ich mir überlegen, wo der Mittelpunkt des Halbkreises, den ich durch zwei Viertelkreise darstellen möchte, liegt und welchen Radius der Halbkreis dann haben wird.

Der Mittelpunkt M liegt genau zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve. Der Radius r ist dann die Strecke von M zu einem der beiden Punkte.

Wo liegt nun der Punkt, der den Halbkreis in zwei Viertelkreise teilt? Er liegt in x -Richtung genau r weit von M entfernt. Die y -Koordinate ist dieselbe wie bei M .

Damit haben wir alle nötigen Informationen und wir können die Formel anwenden und graphisch darstellen.

Schon viel besser!

P Version 3.0

Manchen ist das nun vielleicht “zu rund”.

Etwas zwischen der ersten und zweiten Version könnte auch sehr gut aussehen.

Das ist kein Problem!

Man kann den Zwischenpunkt, der den Halbkreis in zwei Viertelkreise teilt, mehr als nur r -weit von M platzieren.

Wie sieht das dann in der graphischen Darstellung aus?

P Version 3.0

Manchen ist das nun vielleicht “zu rund”.

Etwas zwischen der ersten und zweiten Version könnte auch sehr gut aussehen.

Das ist kein Problem!

Man kann den Zwischenpunkt, der den Halbkreis in zwei Viertelkreise teilt, mehr als nur r -weit von M platzieren.

Wie sieht das dann in der graphischen Darstellung aus?

Das kann man so lassen!

- 5 Die optimale Kurve
 - Wahl der Kurve
 - Approximation eines Viertelkreises
 - Viertelkreise in anderen Buchstaben
 - Offene Fragen

- 6 Extremwert einer Kurve
 - Definition
 - Der Buchstabe R

- 7 Ableitung einer Bézierkurve
 - Ableiten der Bézierkurve
 - Tangente der Kurve

O 2.0

Mit Hilfe von Viertelkreisen können wir nun auch eine weitere Version des Buchstaben **O** erzeugen.

In diesem Fall müssen wir vier Viertelkreise verwenden um den gesamten Buchstaben darzustellen.

O 2.0

Mit Hilfe von Viertelkreisen können wir nun auch eine weitere Version des Buchstaben **O** erzeugen.

In diesem Fall müssen wir vier Viertelkreise verwenden um den gesamten Buchstaben darzustellen.

Auch hier gibt es die Möglichkeit die dafür gewählten Teilungspunkte etwas zu verschieben.

Was passiert falls der Faktor > 0 ist?

Was passiert falls der Faktor < 0 ist?

Welche Wahl erzeugt hier deinen “schönsten” Buchstaben?

O 2.0

Mit Hilfe von Viertelkreisen können wir nun auch eine weitere Version des Buchstaben **O** erzeugen.

In diesem Fall müssen wir vier Viertelkreise verwenden um den gesamten Buchstaben darzustellen.

Auch hier gibt es die Möglichkeit die dafür gewählten Teilungspunkte etwas zu verschieben.

Was passiert falls der Faktor > 0 ist?

Was passiert falls der Faktor < 0 ist?

Welche Wahl erzeugt hier deinen “schönsten” Buchstaben?

Wir können den Buchstaben **O** gut darstellen!

5 Die optimale Kurve

- Wahl der Kurve
- Approximation eines Viertelkreises
- Viertelkreise in anderen Buchstaben
- Offene Fragen

6 Extremwert einer Kurve

- Definition
- Der Buchstabe R

7 Ableitung einer Bézierkurve

- Ableiten der Bézierkurve
- Tangente der Kurve

Welche Probleme hatten wir zuerst?

- P Wie kann ich meine Kurve optimal konstruieren?
- R Wie wähle ich den Endpunkt der zusätzlichen Geraden?
- O Wie wähle ich optimale Kurven?
- O Wie setze ich diese “schön” zusammen?
- O Wieviele Kurven soll ich verwenden?

Welche können wir nun lösen?

- P Wie kann ich meine Kurve optimal konstruieren?
→ Viertelkreise.
- R Wie wähle ich den Endpunkt der zusätzlichen Geraden?
Offen
- O Wie wähle ich optimale Kurven?
→ Viertelkreise.
- O Wie setze ich diese “schön” zusammen?
→ Kein Problem mehr, erledigt sich von selbst!
- O Wieviele Kurven soll ich verwenden?
→ In diesem Fall 4.

- 5 Die optimale Kurve
 - Wahl der Kurve
 - Approximation eines Viertelkreises
 - Viertelkreise in anderen Buchstaben
 - Offene Fragen

- 6 Extremwert einer Kurve
 - Definition
 - Der Buchstabe R

- 7 Ableitung einer Bézierkurve
 - Ableiten der Bézierkurve
 - Tangente der Kurve

Betrachten wir also den Buchstaben **R**. Wir haben uns die Frage gestellt, “wie weit” die Linie, die das **P** zum **R** macht, gehen soll. Optimal wäre wohl jener Wert auf der x -Achse an dem die kubische Kurve in x -Richtung ihren Extremwert hat.

Betrachten wir also den Buchstaben **R**. Wir haben uns die Frage gestellt, “wie weit” die Linie, die das **P** zum **R** macht, gehen soll.

Optimal wäre wohl jener Wert auf der x -Achse an dem die kubische Kurve in x -Richtung ihren Extremwert hat.

Ein *Extremwert* einer Kurve ist der Überbegriff für Maximum und Minimum einer Kurve.

Jene Stelle t_0 für den die Kurve den maximalen/ minimalen Wert $C(t)$ in einer Achsenrichtung annimmt, nennt man *Extremstelle* (*Maximalstelle*/*Minimalstelle*) in dieser Richtung.

Der zugehörige Kurvenpunkt $C(t_0)$ heißt *Maximum*/*Minimum*.

- 5 Die optimale Kurve
 - Wahl der Kurve
 - Approximation eines Viertelkreises
 - Viertelkreise in anderen Buchstaben
 - Offene Fragen

- 6 Extremwert einer Kurve
 - Definition
 - Der Buchstabe R

- 7 Ableitung einer Bézierkurve
 - Ableiten der Bézierkurve
 - Tangente der Kurve

Im allgemeinen Fall berechnet man Extremwerte mittels Ableitungen.
Wir können uns das Leben jedoch mit einer einfachen Betrachtung vereinfachen. Sehen wir uns den Buchstaben **P** noch einmal an.
Was können wir erkennen?

Im allgemeinen Fall berechnet man Extremwerte mittels Ableitungen.

Wir können uns das Leben jedoch mit einer einfachen Betrachtung vereinfachen. Sehen wir uns den Buchstaben **P** noch einmal an.

Was können wir erkennen?

Ursprünglich haben wir diesen Buchstaben mit einer linearen und einer kubischen Bézierkurve dargestellt.

Später jedoch haben wir aus dieser einen kubischen Kurve zwei kubische Bézierkurven gemacht.

Würde man diese jedoch rein graphisch weiterhin als eine Kurve betrachten, so möchten wir das Maximum dieser einen Kurve berechnen.

Dieses Maximum ist jedoch genau ident mit dem End- bzw.

Anfangspunkt unserer beiden Bézierkurven.

Wir können uns die Berechnung mit Ableitungen also ersparen!

R in Mathematica

Am einfachsten ist es, wenn wir den Buchstaben **P** als Grundlage heranziehen.

Wir benötigen nur eine zusätzliche lineare Bézierkurve.
Welche Kontrollpunkte hat diese nun?

R in Mathematica

Am einfachsten ist es, wenn wir den Buchstaben **P** als Grundlage heranziehen.

Wir benötigen nur eine zusätzliche lineare Bézierkurve.

Welche Kontrollpunkte hat diese nun?

Der Anfangspunkt entspricht genau dem Endpunkt der kubischen Bézierkurve.

Der Endpunkt lässt sich nun mittels eines Maximums berechnen.

Damit können wir nun auch diesen Buchstaben graphisch darstellen!

Der Buchstabe S

Nachdem wir nun auch den Buchstaben **R** zufriedenstellen visualisieren können, betrachten wir kurz den Buchstaben **S**.

Dieser besteht offensichtlich auch nur aus kubischen Bézierkurven.

Aber reichen auch hier einfache Viertelkreise aus?

Der Buchstabe S

Nachdem wir nun auch den Buchstaben **R** zufriedenstellen visualisieren können, betrachten wir kurz den Buchstaben **S**.

Dieser besteht offensichtlich auch nur aus kubischen Bézierkurven.

Aber reichen auch hier einfache Viertelkreise aus?

Testen wir es in Mathematica mit zwei Halbkreisen!

Der Buchstabe S

Nachdem wir nun auch den Buchstaben **R** zufriedenstellen visualisieren können, betrachten wir kurz den Buchstaben **S**.

Dieser besteht offensichtlich auch nur aus kubischen Bézierkurven.

Aber reichen auch hier einfache Viertelkreise aus?

Testen wir es in Mathematica mit zwei Halbkreisen!

Es wäre schön, wenn die Kurven “länger” wären!

Natürlich kann man einfach weitere Viertelkreise anfügen.

Probieren wir es aus!

Der Buchstabe S

Nachdem wir nun auch den Buchstaben **R** zufriedenstellen visualisieren können, betrachten wir kurz den Buchstaben **S**.

Dieser besteht offensichtlich auch nur aus kubischen Bézierkurven.

Aber reichen auch hier einfache Viertelkreise aus?

Testen wir es in Mathematica mit zwei Halbkreisen!

Es wäre schön, wenn die Kurven “länger” wären!

Natürlich kann man einfach weitere Viertelkreise anfügen.

Probieren wir es aus!

Das sieht auf jeden Fall besser aus.

Unter Verwendung von Viertelkreisen alleine gibt es aber keine Möglichkeit “kürzere” Kurvenstücke anzufügen.

Verwendbar, aber nicht optimal!

- 5 Die optimale Kurve
 - Wahl der Kurve
 - Approximation eines Viertelkreises
 - Viertelkreise in anderen Buchstaben
 - Offene Fragen

- 6 Extremwert einer Kurve
 - Definition
 - Der Buchstabe R

- 7 Ableitung einer Bézierkurve
 - Ableiten der Bézierkurve
 - Tangente der Kurve

Ableiten der Bézierfunktion

Leider können nicht alle offenen Fragen (insbesondere jene zum Buchstaben **S**) ohne Ableitungen beantwortet werden.

Allerdings ist die Ableitung einer Bézierkurve sehr einfach und lässt sich ohne viel Vorwissen einfach angeben.

Wir benötigen im Folgenden nur die erste Ableitung einer Bézierkurve.

Wie also sieht diese aus?

$$C^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \cdot p_i \quad t \in [0, 1]$$

In diesem Fall leiten wir nach der Variable t ab.

Ableiten der Bézierfunktion

Für die Ableitung der Bézierkurve gilt nun

$$C'(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (p_{j+1} - p_j) B_j^{n-1}(t).$$

Wir können hier erkennen, dass die Ableitung einer Bézierkurve selbst wieder eine Bézierkurve ist.

Der Grad dieser Kurve hat sich dabei um Eins verringert.

- 5 Die optimale Kurve
 - Wahl der Kurve
 - Approximation eines Viertelkreises
 - Viertelkreise in anderen Buchstaben
 - Offene Fragen

- 6 Extremwert einer Kurve
 - Definition
 - Der Buchstabe R

- 7 Ableitung einer Bézierkurve
 - Ableiten der Bézierkurve
 - Tangente der Kurve

Eine *Tangente* ist ein Vektor, der die Steigung der Kurve in einem speziellen Punkt beschreibt. Wir bezeichnen die Tangente mit T . Berechnet wird die Tangente durch die erste Ableitung.

Eine *Tangente* ist ein Vektor, der die Steigung der Kurve in einem speziellen Punkt beschreibt. Wir bezeichnen die Tangente mit T . Berechnet wird die Tangente durch die erste Ableitung.

Sehen wir uns das noch einmal genauer an Hand eines Beispiels an.

$$C^3(t) = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wenden wir nun die allgemeine Ableitungsformel an

$$C^{n'}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (p_{j+1} - p_j) B_j^{n-1}(t).$$

Für $n = 3$ bedeutet das

$$C'(t) = 3((1-t)^2(p_1 - p_0) + (1-t)t(p_2 - p_1) + t^2(p_3 - p_2)).$$

Für $n = 3$ bedeutet das

$$C'(t) = 3((1-t)^2(p_1 - p_0) + (1-t)t(p_2 - p_1) + t^2(p_3 - p_2)).$$

Setzen wir hier die Kontrollpunkte aus dem Beispiel ein, erhalten wir

$$C^{3'}(t) = 3((1-t)^2 \begin{pmatrix} 3-0 \\ 6-0 \end{pmatrix} + (1-t)t \begin{pmatrix} 5-3 \\ 4-6 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 6-5 \\ 2-4 \end{pmatrix}).$$

Für $t = 0.5$ ist der Tangentenvektor zum Beispiel gegeben durch

$$T(0.5) = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

8 Stetigkeit

- C^0 -Stetigkeit
- C^1 -Stetigkeit

9 Verbleibende Buchstaben

- Das Alphabet

Bei fast allen Buchstaben benötigen wir mehr als eine Bézierkurve um ihn ansprechend darzustellen.

Wir haben hierbei bereits besprochen, dass dann Anfangs- und Endpunkte übereinstimmen sollten, um keine Abstände zwischen Kurven zu erzeugen.

Bei fast allen Buchstaben benötigen wir mehr als eine Bézierkurve um ihn ansprechend darzustellen.

Wir haben hierbei bereits besprochen, dass dann Anfangs- und Endpunkte übereinstimmen sollten, um keine Abstände zwischen Kurven zu erzeugen.

Was wir hier beschreiben, hat eine spezielle mathematische Bezeichnung, man nennt es eine C^0 -*stetige Fortsetzung*.

Was ist nun C^0 -Stetigkeit?

Bei fast allen Buchstaben benötigen wir mehr als eine Bézierkurve um ihn ansprechend darzustellen.

Wir haben hierbei bereits besprochen, dass dann Anfangs- und Endpunkte übereinstimmen sollten, um keine Abstände zwischen Kurven zu erzeugen.

Was wir hier beschreiben, hat eine spezielle mathematische Bezeichnung, man nennt es eine C^0 -stetige Fortsetzung.

Was ist nun C^0 -Stetigkeit?

Einfach erklärt, bedeutet es nichts anderes, als dass eine C^0 -stetige Kurve ununterbrochen ist.

Beispiele

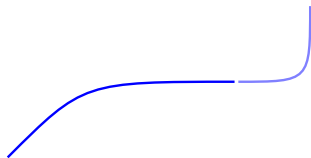


Figure: Nicht C^0 -stetig

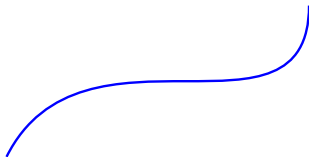


Figure: C^0 -stetig

Beispiele

Was ist nun eine C^0 -stetige Fortsetzung?

Beispiele

Was ist nun eine C^0 -stetige Fortsetzung?

Das bedeutet nichts anderes, als das auch die zusammengesetzte Kurve ununterbrochen ist. Also Anfangs- oder Endpunkt der beiden Kurven übereinstimmen.

Beispiele

Was ist nun eine C^0 -stetige Fortsetzung?

Das bedeutet nichts anderes, als das auch die zusammengesetzte Kurve ununterbrochen ist. Also Anfangs- oder Endpunkt der beiden Kurven übereinstimmen.

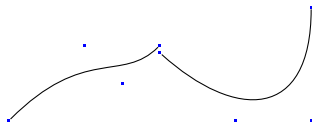


Figure: Keine C^0 -stetige Fortsetzung

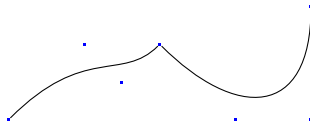


Figure: C^0 -stetige Fortsetzung

8 Stetigkeit

- C^0 -Stetigkeit
- C^1 -Stetigkeit

9 Verbleibende Buchstaben

- Das Alphabet

Natürlich kann man diesen Begriff nun ausweiten.
Wir werden im Folgenden auch C^1 -*stetige Fortsetzungen* benötigen.

Natürlich kann man diesen Begriff nun ausweiten.

Wir werden im Folgenden auch C^1 -*stetige Fortsetzungen* benötigen.

C^1 -stetige Fortsetzungen sind auch C^0 -stetig, das heißt auch hier benötigen wir, dass Anfangs- oder Endpunkte übereinstimmen.

Natürlich kann man diesen Begriff nun ausweiten.

Wir werden im Folgenden auch C^1 -*stetige Fortsetzungen* benötigen.

C^1 -stetige Fortsetzungen sind auch C^0 -stetig, das heißt auch hier benötigen wir, dass Anfangs- oder Endpunkte übereinstimmen.

Zusätzlich muss nun auch die erste Ableitung in diesem Punkt dieselbe sein!

Oder anders gesagt, die Tangenten der beiden Kurven müssen in dem gemeinsamen Punkt gleich sein.

Beispiel

Betrachten wir noch einmal die kubische Bézierkurve mit den Kontrollpunkten

$$p_0 = (0, 1), p_1 = (1, 2), p_2 = (3, 5), p_3 = (5, 2),$$

bezeichnen wir sie mit C_1 .

Wie könnte nun eine kubische Bézierkurve C_2 aussehen, die in p_3 startet und in $p_6 = (10, 1)$ enden und einen C^1 -stetigen Übergang haben soll?

Beispiel

Betrachten wir noch einmal die kubische Bézierkurve mit den Kontrollpunkten

$p_0 = (0, 1), p_1 = (1, 2), p_2 = (3, 5), p_3 = (5, 2)$,
bezeichnen wir sie mit C_1 .

Wie könnte nun eine kubische Bézierkurve C_2 aussehen, die in p_3 startet und in $p_6 = (10, 1)$ enden und einen C^1 -stetigen Übergang haben soll?

Die Ableitungen im Endpunkt von C_1 und Anfangspunkt von C_2 müssen übereinstimmen.

Da für Bézierkurven immer $t \in [0, 1]$ gilt, bedeutet das:

$$C_1'(1) = C_2'(0).$$

Beispiel

Das ergibt durch Einsetzen in die Ableitungsformel:

$$\begin{aligned} 3((1-1)^2(p_1 - p_0) + (1-1)1(p_2 - p_1) + 1^2(p_3 - p_2)) = \\ 3((1-0)^2(p_4 - p_3) + (1-0)0(p_5 - p_4) + 0^2(p_6 - p_5)) \end{aligned}$$

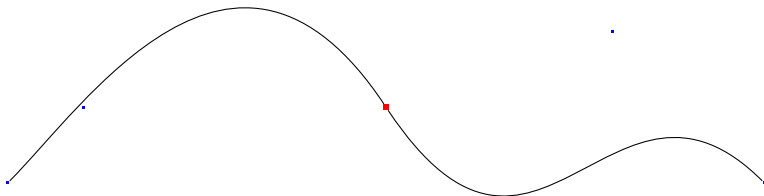
und das ist genau

$$3(p_3 - p_2) = 3(p_4 - p_3).$$

Setzen wir nun die Koordinaten der Punkte ein, ergibt das:

$$\begin{aligned} 3 \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-5 \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} p_{4x} \\ p_{4y} \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21 \\ -3 \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} p_{4x} \\ p_{4y} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_{4x} \\ p_{4y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den Kontrollpunkt p_5 von C_2^3 kann beliebig gewählt werden, mit diesem kann man weiterhin die Krümmung der Kurve beeinflussen. Damit haben wir nun zwei Bézierkurven mit einem C^1 -stetigen Übergang berechnet.



8 Stetigkeit

- C^0 -Stetigkeit
- C^1 -Stetigkeit

9 Verbleibende Buchstaben

- Das Alphabet

Betrachten wir der Reihe nach die 26 wichtigsten Buchstaben im Alphabet und ob wir sie mit unserem bisherigen Wissen in ansprechender Art graphisch darstellen können.

Betrachten wir der Reihe nach die 26 wichtigsten Buchstaben im Alphabet und ob wir sie mit unserem bisherigen Wissen in ansprechender Art graphisch darstellen können.

- A Drei lineare Kurven
- B Eine lineare und vier kubische Kurven
- C Zwei kubische Kurven, nicht ausreichend
- D Eine lineare und zwei kubische Kurven
- E Vier lineare Kurven
- F Drei lineare Kurven
- G Zwei lineare und zwei kubische Kurven, nicht ausreichend

- H Drei lineare Kurven
- I Eine lineare Kurve
- J Eine lineare und zwei kubische Kurven
- K Drei lineare Kurven
- L Zwei lineare Kurven
- M Vier lineare Kurven
- N Drei lineare Kurven
- O Vier kubische Kurven
- P Eine lineare und zwei kubische Kurven
- Q Eine lineare und vier kubische Kurven

- R Zwei lineare und zwei kubische Kurven
- S Vier oder sechs kubische Kurven, nicht ausreichend
- T Zwei lineare Kurven
- U Zwei lineare und zwei kubische Kurven
- V Zwei lineare Kurven
- W Vier lineare Kurven
- X Zwei lineare Kurven
- Y Drei lineare Kurven (auch mit zwei linearen möglich)
- Z Drei lineare Kurven

Es sind also nur mehr drei Buchstaben, die uns Probleme bereiten, dies sind **C**, **G** und **S**.

Es sind also nur mehr drei Buchstaben, die uns Probleme bereiten, dies sind **C**, **G** und **S**.

Grob gesagt sind hier nur kubische Kurven, wie wir sie jetzt immer betrachtet haben, “zu kurz”.

Wir möchten also weitere Kurvenstücke hinzufügen.

Um das in einer ansprechenden Art zu tun, sollten diese dann einen C^1 -stetigen Übergang besitzen.

Betrachten wir also noch einmal den Buchstaben **C**.

Der Buchstabe C

In diesem Fall können wir keine weiteren Viertelkreise anfügen, da wir sonst den Buchstaben **O** erhalten würden.

Wir können uns aber überlegen “wie weit” eine weitere kubische Bézierkurve reichen soll und diese mit einem C^1 -stetigen Übergang an den jeweiligen Viertelkreis anschließen.

Der Buchstabe C

In diesem Fall können wir keine weiteren Viertelkreise anfügen, da wir sonst den Buchstaben **O** erhalten würden.

Wir können uns aber überlegen “wie weit” eine weitere kubische Bézierkurve reichen soll und diese mit einem C^1 -stetigen Übergang an den jeweiligen Viertelkreis anschließen.

Der Anfangspunkt einer solchen Kurve ist durch den Endpunkt eines Viertelkreises gegeben.

Den Endpunkt können wir nach belieben wählen.

Der Buchstabe C

In diesem Fall können wir keine weiteren Viertelkreise anfügen, da wir sonst den Buchstaben **O** erhalten würden.

Wir können uns aber überlegen “wie weit” eine weitere kubische Bézierkurve reichen soll und diese mit einem C^1 -stetigen Übergang an den jeweiligen Viertelkreis anschließen.

Der Anfangspunkt einer solchen Kurve ist durch den Endpunkt eines Viertelkreises gegeben.

Den Endpunkt können wir nach belieben wählen.

Der erste Zwischenpunkt ist durch den C^1 -stetigen Übergang bestimmt.

Wie wähle ich aber nun den verbleibenden Kontrollpunkt?

Der Buchstabe C

Natürlich ist eine Möglichkeit ihn beliebig anzunehmen. Das könnte aber zu interessanten Ergebnissen führen.

Der Buchstabe C

Natürlich ist eine Möglichkeit ihn beliebig anzunehmen. Das könnte aber zu interessanten Ergebnissen führen.

Bisher haben wir alle Kurven in irgendeiner Art symmetrisch gewählt, das spiegelt sich auch in den Kontrollpunkten wieder.

So haben die Zwischenpunkte immer entweder dieselbe x - oder y -Koordinate wie der angrenzende Anfangs- oder Endpunkt der Kurve. Auf diese Art sollten wir auch nun den letzten Kontrollpunkt wählen.

Der Buchstabe C

Natürlich ist eine Möglichkeit ihn beliebig anzunehmen. Das könnte aber zu interessanten Ergebnissen führen.

Bisher haben wir alle Kurven in irgendeiner Art symmetrisch gewählt, das spiegelt sich auch in den Kontrollpunkten wieder.

So haben die Zwischenpunkte immer entweder dieselbe x - oder y -Koordinate wie der angrenzende Anfangs- oder Endpunkt der Kurve. Auf diese Art sollten wir auch nun den letzten Kontrollpunkt wählen.

Versuchen wir es also in Mathematica!

Der Buchstabe C

Natürlich ist eine Möglichkeit ihn beliebig anzunehmen. Das könnte aber zu interessanten Ergebnissen führen.

Bisher haben wir alle Kurven in irgendeiner Art symmetrisch gewählt, das spiegelt sich auch in den Kontrollpunkten wieder.

So haben die Zwischenpunkte immer entweder dieselbe x - oder y -Koordinate wie der angrenzende Anfangs- oder Endpunkt der Kurve. Auf diese Art sollten wir auch nun den letzten Kontrollpunkt wählen.

Versuchen wir es also in Mathematica!

Auf dieselbe Art kann man auch den Buchstaben **S** gestalten.

Der Buchstabe G

Der Buchstabe **G** hat große Ähnlichkeit mit dem **C**.

Dementsprechend ist eine Darstellung, die nur aus Viertelkreisen und Linien besteht nicht unbedingt vorteilhaft.

Der Buchstabe G

Der Buchstabe **G** hat große Ähnlichkeit mit dem **C**.

Dementsprechend ist eine Darstellung, die nur aus Viertelkreisen und Linien besteht nicht unbedingt vorteilhaft.

Nun können wir aber die neue Version des Buchstaben **C** heranziehen und ihn mit Hilfe von linearen Bézierkurven zu einem **G** umwandeln.

Der Buchstabe G

Der Buchstabe **G** hat große Ähnlichkeit mit dem **C**.

Dementsprechend ist eine Darstellung, die nur aus Viertelkreisen und Linien besteht nicht unbedingt vorteilhaft.

Nun können wir aber die neue Version des Buchstaben **C** heranziehen und ihn mit Hilfe von linearen Bézierkurven zu einem **G** umwandeln.

Damit können wir die 26 wichtigsten Buchstaben in vernünftiger Art und Weise nur mit Hilfe von Bézierkurven darstellen!