

Mathematik in der Astronomie

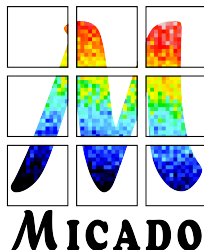
Roland Wagner

Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM)
Österreichische Akademie der Wissenschaften (ÖAW)
Linz, Austria

Linz, 20.Mai 2016

Übersicht

- E-ELT
- Mathematische Begriffe
- Bildverarbeitung
- Inverse Probleme
- Anwendung



European Extremely Large Telescope (E-ELT)

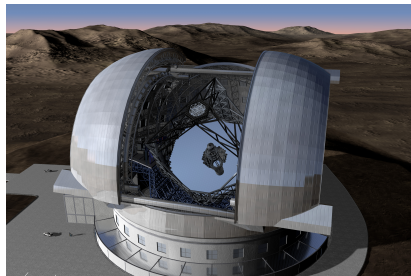
- Europäische Südsternwarte (European Southern Observatory, ESO)
- baut und betreibt Teleskope z.B. in der Atacamawüste in Chile
- 2008: Österreich tritt der ESO bei
- 4.12.2014: Endgültige Entscheidung zum Bau des E-ELT



Very Large Telescope
(VLT, 8m)

European Extremely Large Telescope (E-ELT)

- Europäische Südsternwarte (European Southern Observatory, ESO)
- baut und betreibt Teleskope
z.B. in der Atacamawüste in Chile
- 2008: Österreich tritt der ESO bei
- 4.12.2014: Endgültige Entscheidung zum Bau des E-ELT



European Extremely Large Telescope
(E-ELT, 39m)

European Extremely Large Telescope (E-ELT)

- E-ELT: Cerro Armazones (3060m), Spiegeldurchmesser $\varnothing \sim 39$ m, first light 2024
- Korrektur für Atmosphärische Turbulenzen: **Adaptive Optik**
- Wissenschaftlicher Beitrag aus Linz: *Mathematische Algorithmen und Software*



Mathematische Begriffe: Matrix (und Vektor)

$$b = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \cdots & f(1,N) \\ f(2,1) & f(2,2) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ f(N,1) & f(N,2) & \cdots & f(N,N) \end{pmatrix}$$

Mathematische Begriffe: Differential und Integral

- Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.
- Differential $f'(x)$
Änderung der Funktionswerte im Verhältnis zur Änderung der Eingabewerte
Anwendung: Maxima/Minima, Verhalten einer Funktion
Bsp: $f(x) = x^3$
- Integral $\int f(x)dx$
Entstanden aus Volumenberechnung
Anwendung: Fläche unter einer Kurve, Mittelwert einer stetigen Funktion
Bsp: $f(x) = 3x^2$

Mathematische Begriffe: Faltung

- Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.
- Faltung $(f \star g)(y) = \int f(x)g(y-x)dx$
Verbindung von zwei Funktionen zu einer neuen Funktion,
gewichteter Mittelwert
Anwendung: Bildverbesserung, digitale Erzeugung von Schall
und Hall in der Musik, Signalverarbeitung: Reaktion eines
betrachteten Systems auf einen Impuls.

Darstellung von Bildern und Signalen am Computer

- in Matrix oder Vektor

$$b = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \cdots & f(1,N) \\ f(2,1) & f(2,2) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ f(N,1) & f(N,2) & \cdots & f(N,N) \end{pmatrix}$$

- $x, y = 1, \dots, N$.
- “4-Nachbarpixel” von (x, y) sind:
 $(x+1, y), (x-1, y), (x, y+1), (x, y-1)$
- “4-Diagonalnachbarn” von (x, y) sind:
 $(x+1, y+1), (x+1, y-1), (x-1, y+1), (x-1, y-1)$

Darstellung von Bildern und Signalen am Computer

- Graustufenbild: jedem Pixel können 2^k mögliche “Grauwerte” zugeordnet werden
oft $k = 8$, also 256 mögliche Werte
- Intensitäten, zB Farbwerte aus RGB-Modell
- Transformationen mittels (linearen) Gleichungssystemen
zB Rotation, Translation, Skalierung, Schärfung
- Möglichkeit im Frequenzbereich zu arbeiten
(Fourier-Transformation) – Frequenzen statt Intensitäten

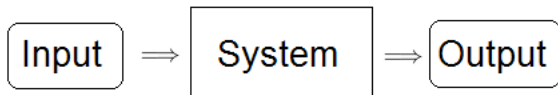
Selbst ein Bild entwerfen

etwa 5x5 Pixel, Grauwerte 0 – 7

0	0	0	0	0
0	7	0	7	0
0	0	7	0	0
0	7	7	7	0
0	0	0	0	0

Inverse Probleme

- Warum Invers?
- Vorwärts vs Inverses Problem



- Welches ist das Vorwärtsproblem und welches das Inverse Problem?

Differentiation: $f(x) \rightsquigarrow f'(x)$

Integration: $f'(x) \rightsquigarrow f(x)$

Gutgestelltheit

- Wann ist ein Problem *gut gestellt*?
- Idee von Hadamard, 1902.
 - Existenz einer Lösung ($\exists$)
 - Eindeutigkeit einer Lösung ($\exists!$)
 - Stabile Abhängigkeit von den Daten
- Nur: was bedeutet das?
- Inverse Probleme sind meist *schlecht gestellt*.
- Was ist also nun das inverse Problem? Differenzieren oder integrieren?

Fehler

- Wie entsteht ein Fehler?
 - zB Messungen
- Betrachte zwei Lösungen $f(x)$ und $f(x_\delta)$, die von verschiedenen Daten x bzw. x_δ bestimmt werden.
- $|f(x) - f(x_\delta)|$ ist der Fehler in der Lösung.
- Welche Arten von Fehlern gibt es beispielsweise?
 - additiv
 - multiplikativ

Fehler

- Haben wir Wissen darüber?
- Warum brauchen wir dieses Wissen?
- Stabilität hängt mit dem Fehler zusammen
Für verschiedene Daten x, x_δ mit $|x - x_\delta| < \delta$ soll $|f(x) - f(x_\delta)|$ nicht viel größer werden.

Fehler

Können wir nun entscheiden, ob integrieren oder differenzieren schlecht gestellt ist?

JA!

Betrachte für $x \in \mathbb{R}$, δ klein:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \\f_{\delta,n}(x) &= f(x) + \delta \sin(nx)\end{aligned}$$

Berechne für $n = 100$, $\delta = 0.01$:

- $\int f(x)dx$ und $\int f_{\delta,n}(x)dx$
- $f'(x)$ und $f'_{\delta}(x)$
- Betrachte die Beträge der Differenzen.
- Sind das sinnvolle Werte für n bzw. δ ?

Grundlagen der Bildfilter

Idee:

- filternde Maske auf jedes Bildpixel (und seine Nachbarn) anwenden
- ähnlich einer Skalarmultiplikation, sowie Faltung im Frequenzbereich → “eine Maske mit einem Bild falten”
- Maske hat z.B. 3×3 Pixel (meist ungerade Anzahl)

Bildverbessernde Filter

Einfachster Fall: Maske ist 1×1

- Bildnegativ
- Kontrast stretching
- Bildsubtraktion (besserer Kontrast z.B. bei medizinischen Bildern)
- Bildmittelung: mehrere verrauschte Aufnahmen mitteln, z.B. Astronomie

→ grössere Masken?

Bildverbessernde Filter: Bildmittelung

6 Bilder vom gleichen Objekt mit unterschiedlichen Aufnahme­fehlern.

0	1	0	3	0
1	7	1	6	0
0	3	7	0	0
0	6	7	7	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	5	0	7	0
0	2	7	0	0
1	6	7	7	0
0	0	0	0	0

0	0	1	0	0
0	7	0	7	0
0	0	6	0	0
0	7	7	7	0
1	0	0	0	1
1	0	0	0	0
0	7	0	7	0
0	0	7	2	0
0	7	7	7	0
0	0	0	0	0

0	0	0	0	0
0	7	0	7	0
0	0	7	0	0
0	7	5	7	0
0	2	4	2	0
0	1	1	0	0
1	5	3	7	0
0	5	7	5	3
0	7	7	5	5
0	0	0	5	0

Bildverbessernde Filter: Bildmittelung

0.167	0.333	0.333	0.5	0
0.333	6.333	0.667	6.8333	0
0	1.667	6.833	1.1667	0.5
0.167	6.667	6.667	6.667	1
0.167	0.333	0.833	1.167	0.167

Bildverbessernde Filter: Bildmittelung

0	0	0	1	0
0	6	1	7	0
0	2	7	1	1
0	7	7	7	1
0	0	1	1	0

Schärfender Filter

- analog zum Differenzieren: 1. und 2. Ableitungen möglich
- zum Hervorheben von feinen Details
- zur Verbesserung von verschwommenen Details
- filtert die hochfrequenten Anteile heraus
- z.B. Roberts, Prewitt, Sobel,...

Schärfender Filter (II)

Idee: wollen Unstetigkeiten im Bild auffinden:

- Unstetigkeiten sind Stellen an denen die Differenz zweier benachbarter Pixel gross ist
- für 1D können wir:
 $f(x+1) - f(x) \quad (\sim \frac{\partial f}{\partial x})$, oder auch
 $f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) \quad (\sim \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})$ messen
- 1.Ableitung misst “dicke” Kanten, 2.Ableitung dünnere, dh
2.Ableitung misst viel feinere Details als die 1.Ableitung.

→ 2.Ableitung meist besser geeignet

- Konstruktion einer Maske aus der 2.Ableitung
- soll invariant gegenüber Rotationen des Bildes sein
- Laplace Operator $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (linear)

- Diskrete Darstellung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y) \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y), \text{ somit}$$

$$\Delta f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

- dazugehörige Maske:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

- Neues Bild = altes Bild - Maske(altes Bild), äquivalent zur

Anwendung von

0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

Selbst die Kanten eines (kleinen) Bildes finden

0	0	0	1	0
0	6	1	7	0
0	2	7	1	1
0	6	7	7	1
0	0	1	1	0

Selbst die Kanten eines (kleinen) Bildes finden

0	-6	-2	-2	-1
-6	27	-15	32	-8
-2	-10	24	-17	3
-7	26	13	25	-3
0	-7	-2	-2	-2

MICADO

Multi-AO Imaging Camera for Deep Observations



Quelle: MICADO Consortium

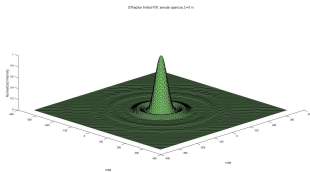
- First light Instrument des E-ELT
- High contrast imaging
- Motions of stars in globular clusters
- Exoplanet search

Bildaufnahme mit einem Teleskop

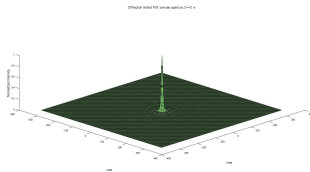
- Das aufgenommene Bild I_o wird durch die point spread function (psf) verzerrt:

$$I_o(x) = (I \star PSF)(x)$$

- Je größer das Teleskop, desto besser approximiert PSF die Deltadistribution:



PSF of the VLT (8m)



PSF of the E-ELT (40m)

Deconvolution

