Young Scientists Matheseminar
Spieltheorie

Christian Irrgeher

Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM)
Austrian Academy of Sciences (ÖAW)
Linz, Austria

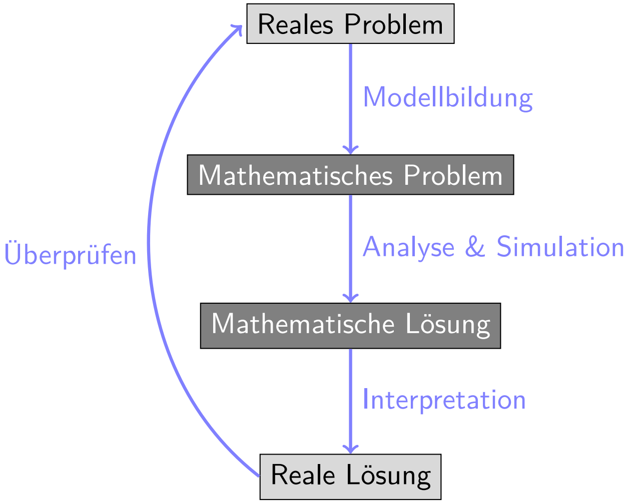
Linz, 16. Dezember 2016

Ein erstes Spiel (Übung 1)

- **NICHT REDEN!!!**
- 2er Gruppen: jeder Spieler verkauft Eis um 1€
- Strand mit 9 Abschnitten (S_1–S_9)
  - Die Spieler können ihren Eisstand in einem Abschnitt aufstellen.
  - Pro Abschnitt sind 10 Badegäste (Kunden).
  - Leute gehen immer zum nächstgelegenen Eisstand (bei gleichen Abstand werden die Leute 1:1 geteilt)
- Spielablauf:
  - Die Spieler platzieren ihren Eisstand (Ankreuzen des entsprechenden Abschnitts).
  - Sobald beide Spieler ihre Position gewählt haben, wird dem anderen Spieler die Position des Eisstandes mitgeteilt.
  - Die Einnahmen der beiden Eisstände werden berechnet.
  - Es werden 5 Runden gespielt.
  - Gewonnen hat wer nach 5 Runden mehr Geld verdient hat.

Mathematische Modellierung

Mathematische Modellierung



Mathematische Modellierung

- Modellierung: Beschreiben der Realität mit Hilfe von "mathematischen Werkzeug"
  - "Mathematisches Werkzeug": Funktionen, Gleichungen, Differentialgleichungen, Zufälligen Prozessen, Graphen,...
  - Modell ist eine vereinfachte Darstellung der Realität
  - Trade-off zwischen Realitätsnähe und Lösbarkeit:
    - Komplexes Modell: realitätsnahe – schwer lösbar
    - Simples Modell: realitätsfern – leicht lösbar
- Sinnvolle Modelle oft nur durch Computersimulationen lösbar
- Modelle sind meist für bestimmte Fragestellung konzipiert
  - Abhängig von den Annahmen zur Vereinfachung der Realität
  - Grenzen des Modells beachten

Anwendungsgebiete der Mathematik

- Physik
- Astronomie
- Chemie
- Biologie
- Mechanik
- Elektrotechnik
- Informationstechnologie
- Wirtschaftswissenschaften
- Psychologie
- Soziologie
- Linguistik
- ...

Spieltheorie

Spieltheorie

- Teilgebiet der (angewandten) Mathematik
- Beschäftigt sich mit Entscheidungssituationen mit mehreren Entscheidungsträgern, die sich gegenseitig beeinflussen können
- Analyse des rationalen Entscheidungsverhaltens in Konfliktsituationen $\rightsquigarrow$ "Optimale" Strategien
- Anwendungsbereiche: Ökonomie, Soziologie, Biologie, Psychologie,...
- Mögliche Fragestellungen: Wie gewinne ich ein konkretes Spiel? Wie handeln Menschen in Märkten? Wozu ist Konkurrenz gut? Warum sind die meisten Tiere symmetrisch? Warum gibt es bei vielen Arten ca. gleich viele Weibchen wie Männchen?

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe

Abbildung : Großer Affe (links) Kleiner Affe (rechts)

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe

- Nahrungsmittel:
  - Früchte von kleinen Büschen
  - Wichtiger Teil der Ernährung: Warifrucht
- Warifrucht:
  - wächst nur gelegentlich auf dem Waribaum
  - Nur eine Frucht pro Baum
  - Hängt an der Spitze eines hochwachsenden Astes
- Warifruchternte:
  - Waribaum hinaufklettern
  - Ast schütteln bis die Frucht runter fällt

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe

- Warifrucht: 100kcal
- Warifruchternte kostet dem großen Affen 20kcal und dem kleinen Affen 0kcal.
- 4 mögliche Situationen:
  - Beide Affen klettern:
    - Großer Affe bekommt 50kcal (70kcal - 20kcal)
    - Kleiner Affe bekommt 30kcal
  - Großer Affe klettert, kleiner Affe wartet:
    - Großer Affe bekommt 40kcal (60kcal - 20kcal)
    - Kleiner Affe bekommt 40kcal
  - Kleiner Affe klettert, großer Affe wartet:
    - Großer Affe bekommt 90kcal
    - Kleiner Affe bekommt 10kcal
  - Beide Affen warten:
    - Großer Affe bekommt 0kcal
    - Kleiner Affe bekommt 0kcal

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe

3 Szenarien für die Entscheidungsreihenfolge

1. Großer Affe entscheidet zuerst
2. Kleiner Affe entscheidet zuerst
3. Beide Affen entscheiden gleichzeitig

Szenario 1: Großer Affe entscheidet zuerst

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 1)

- Großer Affe hat 2 Strategien:
  - Warten (w)
  - Klettern (k)
- Kleiner Affe hat 4 Strategien:
  - Mache das Gleiche wie der große Affe (wk)
  - Mache das Gegenteil vom großen Affen (kw)
  - Klettere egal was der große Affe macht (kk)
  - Warte egal was der große Affe macht (ww)

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 1)

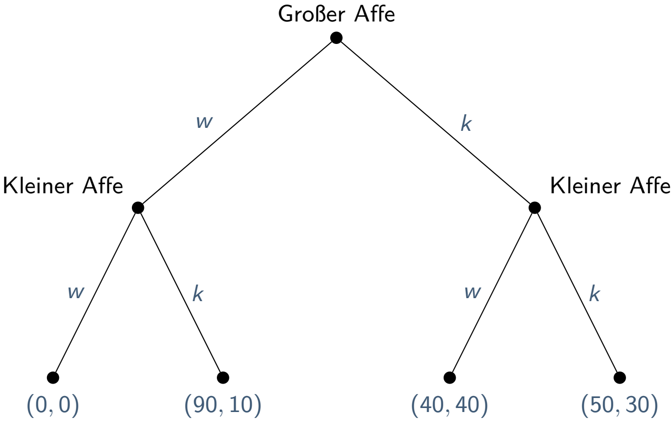


Abbildung : Darstellung des Spiels "Großer Affe und kleiner Affe" (großer Affe entscheidet zuerst) in Extensivform.

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 1)

- Entscheidung des großen Affen berücksichtigt, wie der kleine Affe reagieren würde:
  - Fall 1: großer Affe wartet
    - Optionen des kleine Affen: warten (0kcal), klettern (10kcal)
    - kleiner Affe klettert und bekommt 10kcal
    - großer Affe bekommt 90kcal
  - Fall 2: großer Affe klettert
    - Optionen des kleine Affen: warten (40kcal), klettern (30kcal)
    - kleiner Affe wartet und bekommt 40kcal
    - großer Affe bekommt 40kcal
- Lösung des Spiels:
  - Großer Affe wählt Strategie w (warten)
  - Kleiner Affe wählt Strategie kw (mache das Gegenteil)
  - Auszahlung $(90, 10)$

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 1)

- Warum soll der kleine Affe nicht die Strategie kk wählen?
  - Keinen Einfluss auf die Auszahlung der beiden Affen
  - Vorteil von kw gegenüber kk ist, dass der kleine Affe seine Auszahlung maximiert unabhängig von der Entscheidung des großen Affens.
  - Wenn der große Affe einen Fehler macht, ist kk nicht mehr optimal.
- Die Strategiepaare (w, kw) und (w, kk) sind sogenannte Nash-Gleichgewichte.
  - "Ein Nash-Gleichgwicht ist ein Strategiepaar, bei dem die Strategie jedes einzelnen Spielers die beste Antwort auf die Strategien der anderen ist."
  - "Sinnvolle Lösungen des Spiels"

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 1)

- Weitere Darstellungsform des Spiels ist die Normalform:

		Kleiner Affe			
		kk	*kw*	*wk*	*ww*
Großer Affe	*w*	$90, 10$	$90, 10$	$0, 0$	$0, 0$
	k	$50, 30$	$40, 40$	$50, 30$	$40, 40$

Abbildung : Darstellung des Spiels “Großer Affe und kleiner Affe” (großer Affe entscheidet zuerst) in Normalform.

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 1)

- Mit der Normalform finden wir drei Nash-Gleichgewichte:
  - Bekannt: (w, kw) und (w, kk)
  - Neu: (k, ww)
- Das Strategiepaar (k, ww) wäre für den kleinen Affen besser (40kcal anstatt 10kcal)
  - Kleiner Affe könnte vor der Entscheidung des großen Affen die Strategie ww ankündigen (Drohung).
  - k wäre die beste Antwort auf ww.
  - Hier handelt es sich aber um eine leere Drohung:
    - Wartet der große Affe, wird der kleine Affe seine Strategie ändern und klettern (10kcal anstatt 0kcal)
  - Drohungen können nur funktionieren, wenn man sich dazu verpflichten kann (Spezifikation des Spiels)

Szenario 2: Kleiner Affe entscheidet zuerst

Übung 2

Beispiel (Großer Affe und kleiner Affe)

Betrachte in dem Spiel "Großer Affe und kleiner Affe" den Fall, dass der kleine Affe zuerst eine Entscheidung trifft.

(a) *Gib die Strategien der beiden Affen an.*

(b) *Stelle das Spiel in Extensivform dar.*

(c) *Finde eine Lösung mit Hilfe der Extensivform.*

(d) *Stelle das Spiel in Normalform dar.*

(e) *Finde alle Nash-Gleichgewichte und interpretiere diese.*

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 2)

- Kleiner Affe hat 2 Strategien:
  - Warten (w)
  - Klettern (k)
- Großer Affe hat 4 Strategien:
  - Mache das Gleiche wie der kleine Affe (wk)
  - Mache das Gegenteil vom kleine Affen (kw)
  - Klettere egal was der kleine Affe macht (kk)
  - Warte egal was der kleine Affe macht (ww)

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 2)

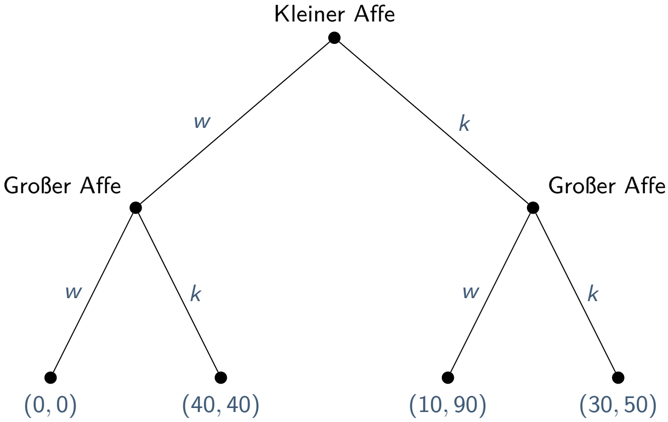


Abbildung : Darstellung des Spiels "Großer Affe und kleiner Affe" (kleiner Affe entscheidet zuerst) in Extensivform.

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 2)

		Großer Affe			
		kk	kw	wk	ww
Kleiner Affe	w	$40, 40$	$40, 40$	$0, 0$	$0, 0$
	k	$30, 50$	$10, 90$	$30, 50$	$10, 90$

Abbildung : Darstellung des Spiels "Großer Affe und kleiner Affe" (kleiner Affe entscheidet zuerst) in Normalform.

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 2)

- Drei Nash-Gleichgewichte:
  - (w, kw) mit Auszahlung $(40, 40)$
  - (w, kk) mit Auszahlung $(40, 40)$
    - nicht optimal, wenn kleiner Affe einen Fehler macht
  - (k, ww) mit Auszahlung $(10, 90)$
    - leere Drohung

Szenario 3: Beide Affen entscheidet gleichzeitig

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 3)

- Großer Affe hat 2 Strategien:
  - Warten (w)
  - Klettern (k)
- Kleiner Affe hat 2 Strategien:
  - Warten (w)
  - Klettern (k)

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 3)

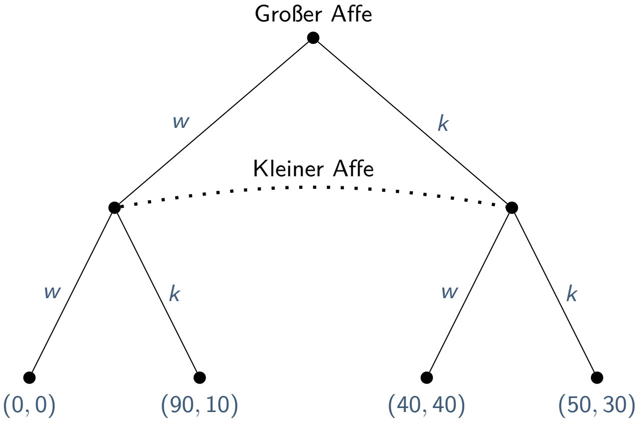


Abbildung : Darstellung des Spiels “Großer Affe und kleiner Affe” (beide Affen entscheiden gleichzeitig) in Extensivform.

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 3)

- Strichlierte Linie bedeutet, dass der kleine Affe nicht weiß in welchem Knoten er ist (sog. Informationsmenge).
- Um Nash-Gleichgewichte zu finden, kann nicht mehr wie in den Szenarien 1 und 2 argumentiert werden.
- Betrachten Normalform:

Großer Affe \ Kleiner Affe	k	w
k	$50, 30$	$40, 40$
w	$90, 10$	$0, 0$

Abbildung : Darstellung des Spiels “Großer Affe und kleiner Affe” (beide Affen entscheiden gleichzeitig) in Normalform.

Beispiel: Großer Affe und kleiner Affe (Szenario 3)

- Zwei Nash-Gleichgewichte
  - Strategiepaar (w, k) mit Auszahlung $(90, 10)$
    - bevorzugt großen Affen
  - Strategiepaar (k, w) mit Auszahlung $(40, 40)$
    - bevorzugt kleinen Affen
- Drittes "Nash-Gleichgewicht" durch gemischte Strategien
  - Großer Affe wartet mit W-keit $1/2$ und klettert mit W-keit $1/2$
  - Kleiner Affe wartet mit W-keit $1/2$ und klettert mit W-keit $1/2$
  - Keiner kann sich durch einseitiges Abweichen verbessern.
  - Erwartet Auszahlung soll maximiert werden.

Darstellungsformen: Extensivform und Normalform

Spiel in Extensivform

Ein n-**Personen Spiel in Extensivform** besteht aus

1. einer Menge von Spielern $i = 1, \ldots, n$;
2. einem Spielbaum bestehend aus Knoten und Kanten;
   - jedem Knoten außer den Endknoten (Blätter) wird ein Spieler zugeordnet;
   - jeder Kante wird eine Handlung zugeordnet;
3. eine Auszahlungsfunktion π;
   - jedem Endknoten wird eine Auszahlung zugeordnet;
4. Informationsmengen;
   - Gruppierung der Knoten, die für einen Spieler nicht unterscheidbar sind.

Spiel in Extensivform

- Eine **Informationsmenge** für den Spiele i ist eine Menge von Knoten des Spielbaums mit folgenden Eigenschaften:
  (a) Spieler i zieht in jedem Knoten der Informationsmenge;
  (b) In jedem Knoten der Informationsmenge sind für den Spieler i dieselben Handlungen möglich;
  (c) Für jeden Knoten in der Informationsmenge sind die Handlungen von Spieler i, die diesen Knoten geführt haben, die selben (perfect recall).
- Der Spieler weiß nicht in welchem Knoten der Informationsmenge er sich befindet.
- Jeder Knoten des Spielbaumes muss zu einer Informationsmenge gehören (evtl 1-elementige Menge).
- Graphisch werden Informationsmengen durch strichlierte Linien zwischen den Knoten dargestellt.

Spiel in Extensivform

- Eine **(reine) Strategie** für Spieler i ist eine Funktion, die jedem Knoten, die dem Spieler i zugeordnet sind, eine zulässige Handlung zuordnet.
- Eine Strategie ist für einen Spieler nur zulässig, wenn an den ununterscheidbaren Knoten (Informationsmenge) die selbe Handlung gewählt wird.
- Wir nennen $(s_1, \ldots, s_n)$, wobei s_i eine Strategie für Spieler i ist, ein **Strategieprofil**.

Spiel in Extensivform

- Ein Strategieprofil legt eindeutig einen Pfad von der Wurzel zu einem Endknoten fest.
  - Ein Strategieprofil legt somit auch eindeutig eine Auszahlung fest.
  - Unterschiedliche Strategieprofile können zum selben Endknoten führen.
  - Aus dem Spielverlauf lässt sich nicht auf die Strategie der Spieler schließen.
- Die Auszahlung für Spieler i unter dem Strategieprofil $(s_1, \ldots, s_n)$ ist

$$\pi_i(s_1, \ldots, s_n) := \pi_i(t),$$

wobei t der durch $(s_1, \ldots, s_n)$ festgelegte Endknoten des Spielbaumes ist.

Spiel in Normalform

Ein n-**Personen Spiel in Normalform** besteht aus

1. einer Menge von Spielern $i = 1, \ldots, n$;
2. einer Menge S_i von reinen Strategien für jeden Spieler i;
   - wir nennen $s = (s_1, \ldots, s_n)$ mit $s_i \in S_i$ ein Strategieprofil
3. einer Auszahlungsfunktion π_i für jeden Spieler i, die jedem Strategieprofil s die Auszahlung für Spieler i zuweist.

Spiel in Normalform

- Bei nur 2 Spielern und einer endlichen Anzahl an reinen Strategien, lässt sich ein Spiel in Normalform in “Matrixform” darstellen.
- Jedes Spiel in Extensivform liefert eindeutig ein Spiel in Normalform.
- Wir sagen zwei Spiele in Extensivform sind äquivalent, falls sie dem selben Spiel in Normalform entsprechen (abgesehen von unterschiedlichen Bezeichnungen der Spieler und Handlungen).

Übung 3

Beispiel (Gefangenendilemma)

Zwei Verbrecher werden beschuldigt ein Verbrechen begangen zu haben. Die Polizei hat genug Beweismaterial um beide ein Jahr ins Gefängnis zu schicken. Es werden aber beide in getrennten Räumen verhört. Falls einer der beiden Verbrecher gesteht und belastendes Material über den Anderen liefert, wird er frei gelassen und der andere bekommt eine Gefängnisstrafe von 10 Jahren. Gestehen aber beide und belasten sich gegenseitig, müssen beide für 8 Jahre ins Gefängnis.

(a) *Gib die Extensivform des Spiels an.*

(b) *Gib die Normalform des Spiels an.*

Übung 4

Beispiel (Schere-Stein-Papier)

Bei "Schere-Stein-Papier" spielen zwei Personen gegeneinander, indem sie gleichzeitig mit der Hand entweder "Schere" (Faust mit ausgestreckten Zeige- und Mittelfinger), "Stein" (Faust) oder "Papier" (flache Hand) anzeigen. Es gilt dabei "Schere" schlägt "Papier", "Papier" schlägt "Stein" und "Stein" schlägt "Schere". Der Sieger bekommt dabei 1 € vom Verlierer und bei Gleichstand wird nichts gezahlt.

(a) *Gib die Extensivform des Spiels an.*

(b) *Gib die Normalform des Spiels an.*

Übung 5

Beispiel (Throwing Fingers)

Zwei Spieler zeigen gleichzeitig ihre Hand mit entweder einem oder zwei ausgestreckten Fingern. Ist die Summe der Finger gerade, muss Spieler 2 einen Euro an Spieler 1 zahlen. Ansonsten gewinnt Spieler 2 einen Euro von Spieler 1:

(a) *Gib die Extensivform des Spiels an.*

(b) *Gib die Normalform des Spiels an.*

Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien

Nash-Gleichgewicht

- Für ein Strategieprofil $s = (s_1, \dots, s_n)$ und eine Strategie t_i von i schreiben wir

$$(t_i, s_{-i}) := \begin{cases} (t_1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } i = 1, \\ (s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n) & \text{falls } 1 < i < n, \\ (s_1, \dots, s_{n-1}, t_n) & \text{falls } i = n. \end{cases}$$

- Für (s_i, s_{-i}) ist s_i die Strategie des Spielers i und s_{-i} sind die Strategien der anderen Spieler.
- Beispiele:
  - $\pi_i(s_i, s_{-i})$: "Auszahlung des Spielers i in Abhängigkeit seiner eigenen Strategie"
  - $\pi_j(s_i, s_{-i})$: "Auszahlung des Spielers j in Abhängigkeit der Strategie von Spieler i"

Nash-Gleichgewicht

Definition (Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien)

Ein **Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien** ist ein Strategieprofil $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ in reinen Strategien, falls für alle Spieler $i = 1, \ldots, n$ und alle $s_i \in S_i$ gilt, dass

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^*).$$

- Kein Spieler kann sich durch einseitiges Abweichen von s^* verbessern.
- Somit können die Spieler bei s^* bleiben, wenn sie einmal dort sind.
- Es ist durchaus vernünftig anzunehmen, dass ein Spiel von rationalen Spielern so gespielt wird, dass ein Nash-Gleichgewicht als Lösung herauskommt.

Nash-Gleichgewicht

2 Nash-Gleichgewichte (beide vernünftig und gleich gut):

Spieler 2

Spieler 1		A	B
	X	$1, 1$	$0, 0$
	Y	$0, 0$	$1, 1$

Nash-Gleichgewicht

2 Nash-Gleichgewichte (beide vernünftig, aber (X, A) besser für beide Spieler):

Spieler 2

Spieler 1		A	B
	X	$2, 2$	$0, 0$
	Y	$0, 0$	$1, 1$

Übung 3–5

Beispiel (Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien)

3(c) *Gibt es ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien im Gefangenendilemma?*

4(c) *Gibt es ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien bei Schere-Stein-Papier?*

5(c) *Gibt es ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien bei Throwing Fingers?*

Gemischte Strategien und Nash-Gleichgewicht

Gemischte Strategien

- Eine **gemischte Strategie** σ_i für Spieler i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $S_i = \{s_1, \dots, s_k\}$:

$$\sigma_i = p_{s_1} s_1 + p_{s_2} s_2 + \dots + p_{s_k} s_k,$$

  wobei $p_{s_1}, \dots, p_{s_k} \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{k} p_{s_j} = 1$.
- Für ein Strategieprofil $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ in gemischten Strategien ist die **erwartete Auszahlung** von Spieler i gegeben durch

$$\pi_i(\sigma) := \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_n \in S_n} p_{s_1} \cdots p_{s_n} \pi(s_1, \dots, s_n)$$

Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien

Sei $\sigma_i = p_{s_1} s_1 + \ldots + p_{s_k} s_k$ eine gemischt Strategie von i.

- p_{s_j} heißt das **Gewicht** von s_j in σ_i.
- Wir sagen σ_i **verwendet** s_j, falls $p_{s_j} > 0$.
- Wir sagen σ_i **verwendet** s_j **nicht**, falls $p_{s_j} = 0$.
- σ_i heißt **vollständig gemischt**, falls $p_{s_j} > 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$.
- Reine Strategien sind ein Spezialfall von gemischten Strategien (alle p_{s_j} bis auf eines sind 0).

Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien

Definition (Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)

Ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** ist ein Strategieprofil $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ in gemischten Strategien, falls für alle Spieler $i = 1, \ldots, n$ und alle gemischten Strategien σ_i gilt, dass

$$\pi_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*).$$

Übung 6

Beispiel (Gemischte Strategien)

Spieler 2

		A	B	C
	X	$2,2$	$4,3$	$2,2$
Spieler 1	Y	$3,-1$	$-2,2$	$1,0$
	Z	$6,0$	$1,2$	$3,5$

(a) *Gib die gemischte Strategie* σ_1 *von Spieler 1 an, bei der* X *mit W-keit* $1/6$ *und* Y *mit W-keit* $1/2$.

(b) *Gib eine gemischte Strategie* σ_2 *für Spieler 2 an, bei der* A *und* C *verwendet werden aber* B *nicht.*

(c) *Berechne die erwartete Auszahlung für* (σ_1, σ_2).

Fundamentalsätze von Nash

Fundamentalsätze von Nash

Satz (Fundamentalsatz über die Existenz von Nash-Gleichgewichten)

Falls jeder Spieler in einem n-Personen-Spiel nur eine endliche Anzahl an reinen Strategien zur Verfügung hat, dann gibt es ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Fundamentalsätze von Nash

Satz (Fundamentalsatz über Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien)

Sei $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ein Strategieprofil in gemischten Strategien für ein n-Personen-Spiel. Dann ist σ ein Nash-Gleichgewicht genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) *Wenn s_i und s_i' von σ_i verwendet werden, dann gilt*

$$\pi_i(s_i, \sigma_{-i}) = \pi_i(s_i', \sigma_{-i}).$$

(b) *Wenn s_i vom σ_i verwendet wird und s_i' von σ_i nicht verwendet wird, dann gilt*

$$\pi_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(s_i', \sigma_{-i}).$$

Übungen 4–5

Beispiel (Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)

4(d) *Finde ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien bei Schere-Stein-Papier?*

5(d) *Finde ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien bei Throwing Fingers?*

Übung 7

Beispiel (Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien)

Finde eine Formel für das Nash-Gleichgewicht für das folgende 2*-Personen-Spiel in Normalform:*

Spieler 2

		A	B
Spieler 1	X	a_1, a_2	b_1, b_2
	Y	c_1, c_2	d_1, d_2

Nimm dafür an, dass die Strategie von Spieler 1 von der Form $\sigma_1 = \alpha X + (1-\alpha)Y$ *und die Strategie von Spieler 2 von der Form* $\sigma_2 = \beta A + (1-\beta)B$ *ist. Finde nun Formeln für die Wahrscheinlichkeiten* α *und* β*, sodass* (σ_1, σ_2) *ein Nash-Gleichgewicht ist.*

Dominierte Strategien

Dominierte Strategien

Definition (Dominierte Strategien)

Seien s_i und s_i' reine Strategien von Spieler i. Wir sagen s_i' wird **stark dominiert** von s_i, falls für alle $t_{-i} \in S_{-i}$ gilt

$$\pi_i(s_i, t_{-i}) > \pi_i(s_i', t_{-i}).$$

- Wenn s_i' stark dominiert wird von s_i, dann ist s_i besser als s_i' unabhängig davon, was die anderen machen.
- Rationale Spieler werden keine stark dominierten Strategien verwenden.
- Auch die anderen Spieler wissen, dass stark dominierte Strategien nicht verwendet werden.
- Stark dominierte Strategien kann keine Strategie in einem Nash-Gleichgewicht sein.

Dominierte Strategien

- Bei einem Spiel in Normalform kann man stark dominierte Strategien streichen.
  - Das Spiel wird auf ein neues Spiel in Normalform mit weniger Strategien reduziert.
- Bei dem neuen Spiel kann man wieder stark dominierte Strategien streichen.
- Das wiederholt man, solange es stark dominierte Strategien gibt.
- Diese Lösungsmethode nennt man iterierte Elimination von stark dominierten Strategien.
- Bleibt am Ende für jeden Spieler nur mehr eine Strategie übrig, bilden diese ein Nash-Gleichgewicht.

Übung 8

Beispiel (Dominierte Strategien)

Bestimme alle stark dominierten Strategien in dem 2-Personen-Spiel in Normalform:

		Spieler 2		
		A	B	C
	X	$10, 8$	$8, 3$	$8, 5$
Spieler 1	Y	$5, 10$	$10, 5$	$3, 8$
	Z	$8, 3$	$3, 8$	$5, 10$

Übung 9

Beispiel (American Football)

In einem Football-Spiel hat die Offensive zwei Strategien: Laufen oder Passen. Die Verteidigung hat drei Strategien: Lauf-Abwehr, Pass-Abwehr, Blitzangriff auf den Quaterback. Durch Analyse von vielen Spielen sind die Statistiker auf folgende Auswertung gekommen, welche den erwarteten Gewinn an Yards angibt:

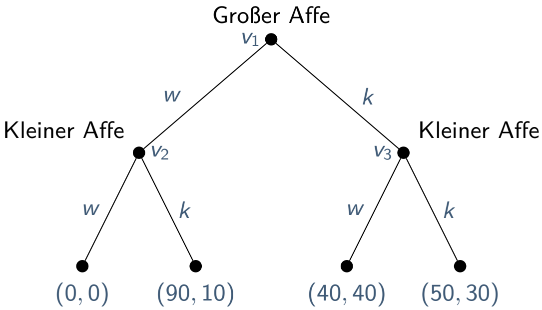
		Defensive		
		Lauf-Abwehr	*Pass-Abwehr*	*Blitz*
Offensive	*Laufen*	$3, -3$	$7, -7$	$15, -15$
	Passen	$9, -9$	$8, -8$	$10, -10$

Finde eine Lösung, indem du starkt dominierte Strategien eliminierst.

Rückwärtsinduktion

Rückwärtsinduktion

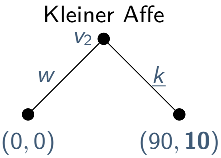
Betrachten nochmal Szenario 1 des Spiels "Großer Affe und kleiner Affe":

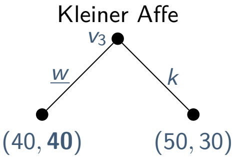


Annahme: Jeder Spieler trifft seine Entscheidung stets so, dass seine Auszahlung maximiert wird.

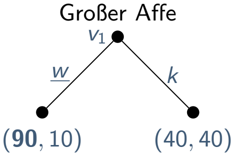
Rückwärtsinduktion

In Knoten v_2 und v_3:





Das ergibt für den großen Affen folgendes Spiel:



Rückwärtsinduktion

- Vorgehensweise der Rückwärtsinduktion
  - Man beginnt bei den Teilspielen bestehend aus den Endknoten und den direkt darüberliegenden Knoten.
  - Für jedes dieser Teilspiele bestimmt man die optimale Strategie für den Spieler.
  - Man reduziert den Spielbaum indem man die Endknoten entfernt und den neuen Endknoten die entsprechenden Auszahlungen zuordnet, die sich aus den vorher bestimmten optimalen Strategien ergeben.
  - Dies wiederholt man solange bis man der Wurzel des Spielbaumes eine Auszahlung zuordnen kann.
- Durch Rückwärtsinduktion bekommt man nicht alle Nash-Gleichgewichte.
- Die Lösung der Rückwärtsinduktion ist ein teilspiel-perfektes Nash-Gleichgewicht.
- Die Lösung muss nicht eindeutig sein.

Übung 11

Beispiel (Streichholzspiel)

Zwei Personen (A und B) spielen folgendes Spiel: Gegeben ist ein Häufchen Streichhölzer. Die Spieler ziehen abwechselnd und es beginnt Spieler A. Bei jedem Zug darf der Spieler entweder ein Streichholz oder zwei Streichhölzer nehmen. Sieger ist, wer das letzte Streichholz nimmt, und bekommt 1 € vom Verlierer.

(a) *Stelle das Spiel in Extensivform für den Fall von 4 Streichhölzer dar und finde eine Lösung des Spiels.*

(b) *Gibt es für den allgemeinen Fall eine Lösung bzw. eine optimale Strategie für die Spieler?*

Literaturempfehlung

- Herbert Gintis. Game Theory Evolving. Second Edition, Princton University Press, 2009.