Riesenteleskope und Mathematik

Victoria Hutterer

Johannes Kepler Universität, Linz

Linz, 03. Februar 2017

Übersicht

Übersicht

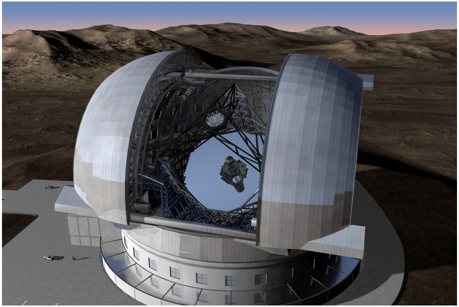
European Extremely Large Telescope (E-ELT)

- Europäische Südsternwarte/ European Southern Observatory (ESO) in München
- Europäische Organisation für astronomische Forschung in der südlichen Hemisphäre
- 16 Mitgliedsstaaten
- 2005: erste Pläne für das E-ELT
- 4. Dez. 2014: Entscheidung: E-ELT wird gebaut

Very Large Telescope (VLT, 8m)

European Extremely Large Telescope (E-ELT)

- Europäische Südsternwarte/ European Southern Observatory (ESO) in München
- Europäische Organisation für astronomische Forschung in der südlichen Hemisphäre
- 16 Mitgliedsstaaten
- 2005: erste Pläne für das E-ELT
- 4. Dez. 2014: Entscheidung: E-ELT wird gebaut

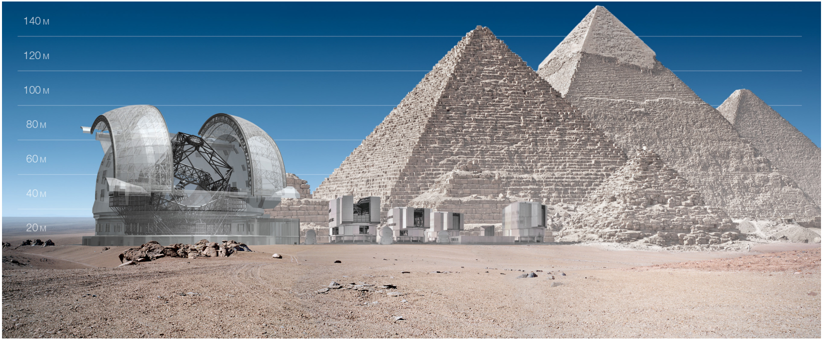


European Extremely Large Telescope (E-ELT, 39m)

European Extremely Large Telescope

- "**the world's biggest eye on the sky**", größtes Teleskop der Welt
- am Cerro Armazones (3060m) in der Atacama Wüste in Chile
- soll 2024 in Betrieb gehen

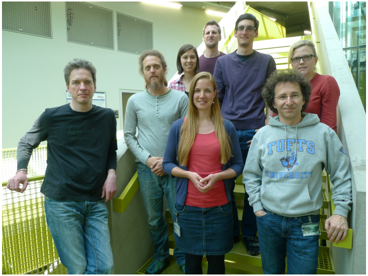
European Extremely Large Telescope



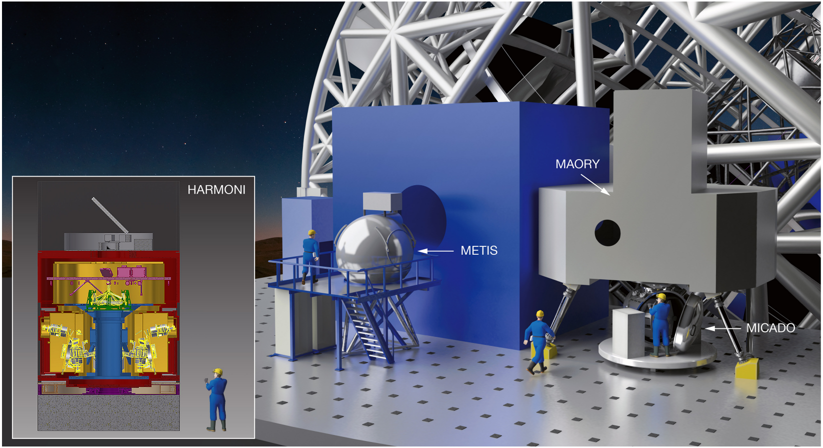
E-ELT vs. Pyramiden von Gizeh

The world's biggest eye on the sky

- Austrian Adaptive Optics (AAO) Team in Linz
- Mathematische Algorithmen und Software für das E-ELT

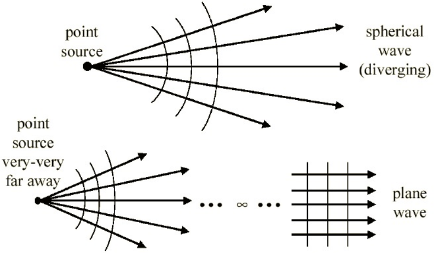


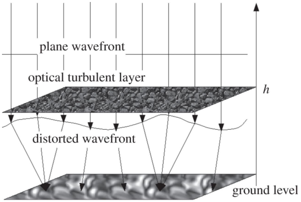
Instrumente am E-ELT



Verschwommene Aufnahmen

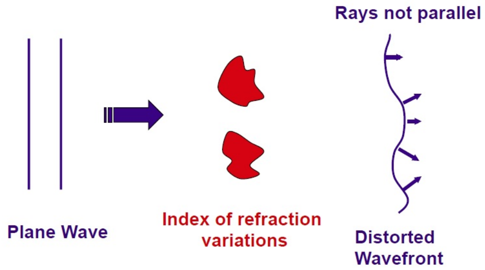
- Warum erhält man mit Teleskopen, die auf der Erde stehen, verschwommene Bilder?
- Wodurch werden atmosphärische Turbulenzen hervorgerufen?
- Sind Lichtstrahlen noch parallel, wenn sie das Teleskop erreichen?



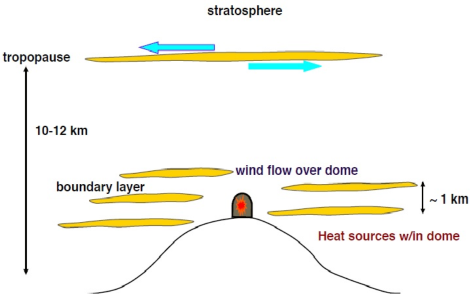


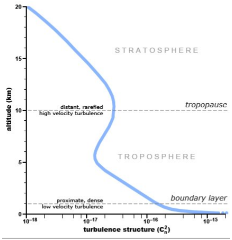
Der Brechungsindex bestimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem Medium

- Brechungsindex n
- Phasengeschwindigkeit $v_\Phi = \frac{c}{n}$
- Was passiert, wenn $n > 1$ gilt?
  - Vakuum: $n = 1$
  - Luft: $n = 1.00029$
  - Wasser: $n = 1.33$
  - Fensterglas: $n = 1.52$
  - Diamant: $n = 2.42$

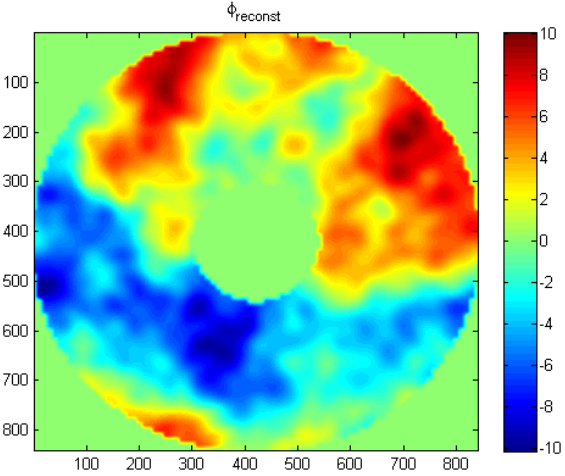


Wo treten diese Turbulenzen auf?

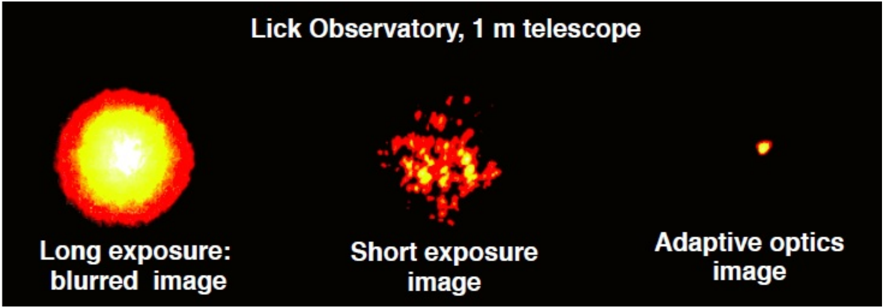




Atmosphärische Turbulenzen



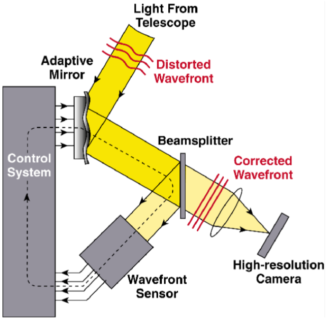
Was ist Adaptive Optik?



- Technik zur Bildverbesserung
- Verwendung: Astronomie, Bildanalyse (vision science), Laserbehandlung von Augen, Fernerkundung (remote sensing), ...

Adaptive Optik (AO)

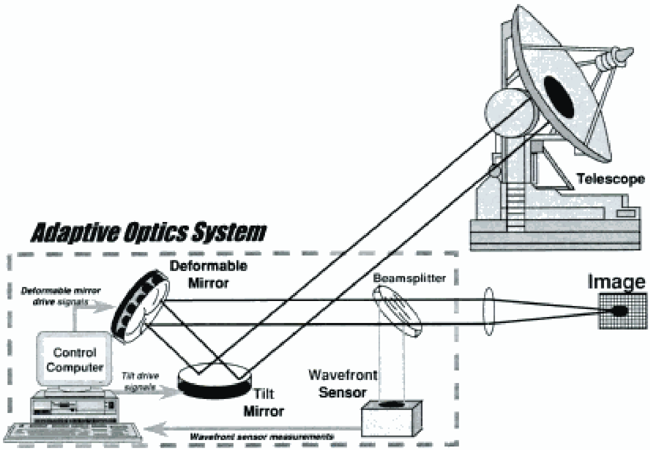
Adaptive Optik korrigiert die Turbulenzen, die in der Atmosphäre entstehen.



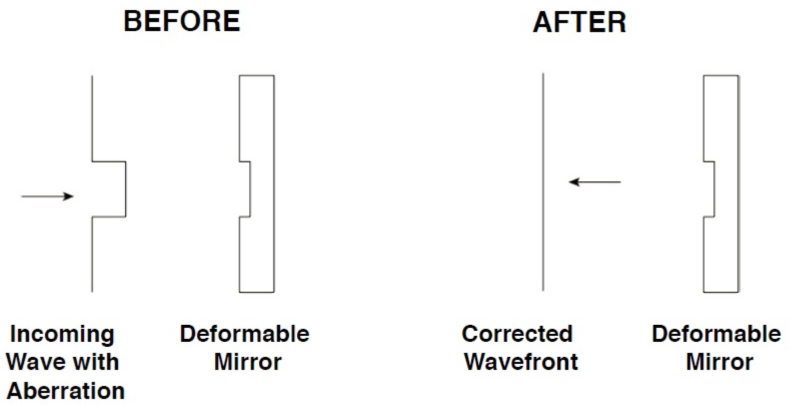
- man verwendet das Licht eines Sterns (guide star)
- Wellenfrontsensor misst das einfallende Licht
- beweglicher Spiegel gleicht die Turbulenzen aus

Laserleitsterne

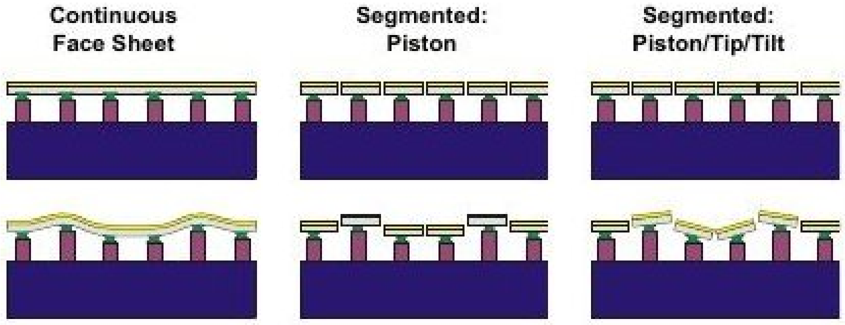
Adaptive Optik



Wie funktionieren die beweglichen Spiegel?

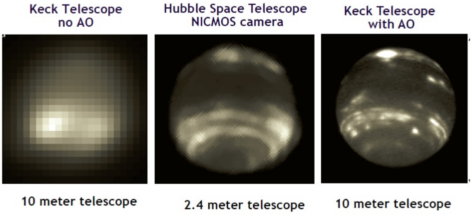


Bewegliche Spiegel

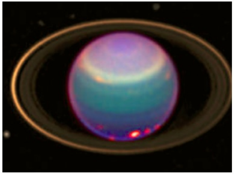
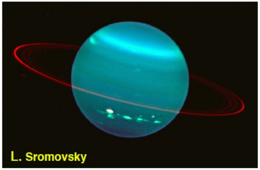


Vergleich zu Space-Teleskopen

Neptun



Uranus

Übersicht

Mathematische Einführung: Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = ?$$

Mathematische Einführung: Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 25 & 29 \end{pmatrix}$$

Mathematische Einführung: Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

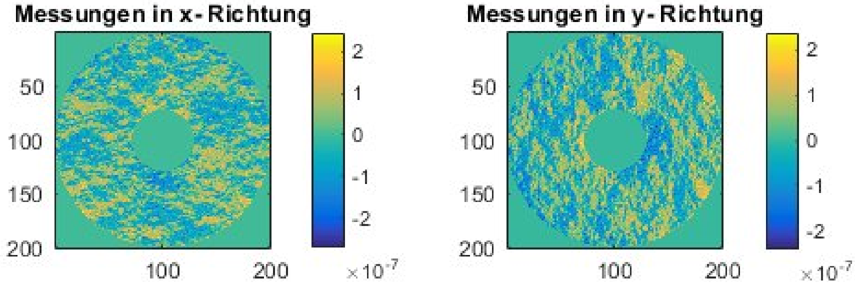
$$A \cdot B = ?$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) & 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 3 & 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 + 7 \cdot (-3) & 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 27 & -5 \\ -3 & 16 & -3 \\ 13 & -14 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel: Messungen am Sensor eines Teleskops



Hier haben wir 200×200 Einträge.

Die Matrixmultiplikation wird sehr aufwendig!

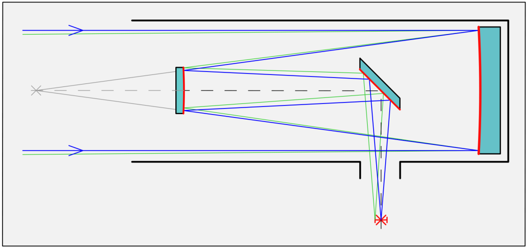
Mathematische Begriffe: Differential und Integral

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
- Differential $f'(x)$
  Änderung der Funktionswerte im Verhältnis zur Änderung der Eingabewerte
  Anwendung: Maxima/Minima, Verhalten einer Funktion
  Beispiel: $f(x) = x^3$
- Integral $\int f(x)dx$
  Anwendung: Fläche unter einer Kurve, Mittelwert einer stetigen Funktion
  Beispiel: $f(x) = 3x^2$

Übersicht

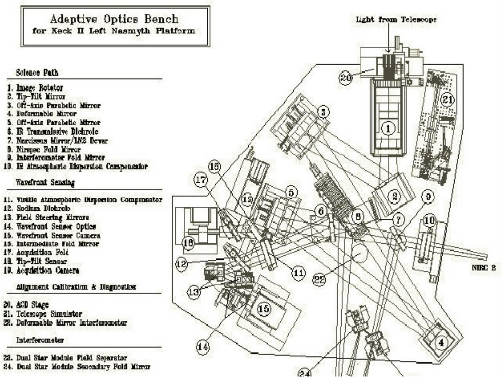
Wie sieht ein einfaches Teleskop aus?

Nasmyth Teleskop



Optisches Layout eines AO Systems

Warum sieht das so kompliziert aus?



- Wovon hängt die Größe und die Position des beweglichen Spiegels ab?
- Was bestimmt die Größe und Position des Wellenfrontsensors?
- ...

Übersicht

Was ist ein inverses Problem?

Beispiel:

Wer multiplizieren kann, kann quadrieren.

direktes Problem: Das direkte Problem besteht darin, zu einer gegebenen Zahl x ihr Quadrat y zu bilden, also $y = x^2$.

inverses Problem: Gegeben ist eine Zahl y. Man soll nun eine Zahl x finden, deren Quadrat gleich y ist. Oder anders gesagt: Man soll aus y die Wurzel ziehen.

Bei diesem Beispiel ist das inverse Problem schwieriger als das direkte. Das Vorwärtsproblem ist in $\mathbb{N}$ ausführbar, aber für das inverse Problem muss man $\mathbb{R}$ einführen.

Was ist ein inverses Problem?

- vorwärts vs. rückwärts rechnen

$$\text{Parameter eines mathematischen Modells} \rightarrow \text{Daten}$$
$$\text{Parameter eines mathematischen Modells} \leftarrow \text{Daten}$$

- Beispiele für Vorwärtsprobleme und inverse Probleme
- Differenzieren & Integrieren

$$f(x) \rightarrow f'(x)$$
$$f'(x) \rightarrow f(x)$$

Ein inverses Problem ist meistens schlecht gestellt.

Was bedeutet das?

Satz von Hadamard (Gutgestelltheit):

- Es gibt eine Lösung.
- Die Lösung ist eindeutig.
- Die Lösung hängt stetig von den Daten ab.

Ist Differenzieren oder Integrieren schlecht gestellt?

Inverse Probleme sind meist schlecht gestellt.

Fehler in den Daten

- Können Fehler in den Daten entstehen?
- Wie?
- Was passiert dann mit unserer Rechnung?

Wir betrachten richtige Daten x und fehlerhafte Daten x_δ.

Wie verhalten sich $f(x)$ und $f(x_\delta)$?

Der Fehler in der Lösung wird durch $|f(x) - f(x_\delta)|$ beschrieben.

Wie wirkt sich ein kleiner Fehler in den Daten auf die Lösung aus?

Wir verwenden

- $f(x) = 2x^3$
- $f_{\delta,n}(x) = 2x^3 + \delta \sin\left(\frac{n}{\delta}x\right)$

für $x \in \mathbb{R}$ und δ sehr klein.

Berechne für $n = 100, \delta = 0.01$:

- $f'(x)$ und $f'_{\delta,n}(x)$
- $\int f(x)\ dx$ und $\int f_{\delta,n}(x)\ dx$

Wie wirkt sich ein kleiner Fehler in den Daten auf die Lösung aus?

- Kennen wir den Fehler?
- Brauchen wir Informationen über den Fehler?

Die Stabilität hat einen Zusammenhang mit dem Fehler.

Schon ein kleiner Fehler in den Daten kann einen großen Fehler in den Lösungen bewirken!

- Fehler δ in den Daten: $|x - x_\delta| < \delta$
- Fehler in der Lösung: $|f(x) - f(x_\delta)|$

Der Ausdruck $|f(x) - f(x_\delta)|$ soll klein bleiben!

Wie wirkt sich ein kleiner Fehler in den Daten auf die Lösung aus?

- Berechne nun die Fehler!
  - $|f'(x) - f'(x_\delta)| = ?$
  - $|\int f(x) - \int f(x_\delta)| = ?$
- Was passiert?
- Sind die Werte für n und δ sinnvoll?

Welches Problem ist nun schlecht gestellt? - Differenzieren, Integrieren?

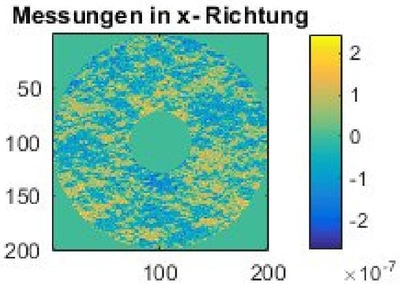
Beispiele für inverse Probleme

- Astronomie (Adaptive Optik): Bildverbesserung
- Computertomographie: Man möchte aus den Messungen eines Röntgenstrahls, der einen Körper durchstrahlt, Informationen über das Innere gewinnen.
- Aus den gemessenen Signalen eines Erdbebens möchte man Eigenschaften des Erdinneren ableiten.
- ...

Übersicht

Anwendungsbeispiel: Rekonstruktion einer Wellenfront

Wir möchten aus den Messungen (Daten), die wir vom Sensor erhalten,



die einfallende Wellenfront berechnen.

- Ist das ein Vorwärtsproblem?
- Ist das ein inverses Problem?

zurück zu den Matrizen ...

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- Wir möchten $Ax = b$ lösen.
- Wir benötigen die inverse Matrix A^{-1}, denn dann gilt:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

$\rightarrow$ Wir betrachten die Singulärwertzerlegung der Matrix:

Sei A eine beliebige Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen U, V, sodass gilt

$$U^T AV = D,$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist und die Singulärwerte enthält.

Was heißt das? Warum brauchen wir das?

Wir rechnen ein Beispiel zur Singulärwertzerlegung

- U^T bezeichnet die transponierte Matrix.
- Beispiel:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \to U^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^T AV = ?$$

Wir rechnen ein Beispiel zur Singulärwertzerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^T AV = D = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Inverse der Matrix A

- Kennen wir die Matrix A^{-1}? Gibt es Vorschläge?
- Können wir die Singulärwertzerlegung verwenden, um A^{-1} zu berechnen?
- Da D nur in der Diagonale Einträge hat, können wir D^{-1} einfach berechnen:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Was wissen wir bereits?
  - $U^T U = I$ bzw. $U^{-1} = U^T$
  - $V^T V = I$ bzw. $V^{-1} = V^T$
  - D^{-1}
- Rechenregeln:
- $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = A^{-T}$

Wir überlegen uns...

$$U^T AV = D \qquad / \quad {}^{-1}$$

Wir überlegen uns...

$$U^T AV = D \qquad / \quad {}^{-1}$$

$$\left(U^T AV\right)^{-1} = D^{-1} \qquad / \quad \text{Klammer auflösen}$$

Wir überlegen uns...

$$
\begin{aligned}
U^T A V &= D & &/ \quad {}^{-1} \\
\left(U^T A V\right)^{-1} &= D^{-1} & &/ \quad \text{Klammer auflösen} \\
V^{-1} A^{-1} U^{-T} &= D^{-1} & &/ \quad V^{-1} \text{und } U^{-T} \text{ersetzen}
\end{aligned}
$$

Wir überlegen uns...

$$
\begin{aligned}
U^T A V &= D && / \quad {}^{-1} \\
\left(U^T A V\right)^{-1} &= D^{-1} && / \quad \text{Klammer auflösen} \\
V^{-1} A^{-1} U^{-T} &= D^{-1} && / \quad V^{-1} \text{und } U^{-T} \text{ersetzen} \\
V^T A^{-1} U &= D^{-1} && / \quad \text{mit } V \text{ von links multiplizieren}
\end{aligned}
$$

Wir überlegen uns...

$$
\begin{aligned}
U^T A V &= D && / \quad {}^{-1} \\
\left(U^T A V\right)^{-1} &= D^{-1} && / \quad \text{Klammer auflösen} \\
V^{-1} A^{-1} U^{-T} &= D^{-1} && / \quad V^{-1}\text{und } U^{-T}\text{ersetzen} \\
V^T A^{-1} U &= D^{-1} && / \quad \text{mit } V \text{von links multiplizieren} \\
A^{-1} U &= V D^{-1} && / \quad \text{mit } U^T \text{von rechts multiplizieren}
\end{aligned}
$$

Wir überlegen uns...

$$
\begin{aligned}
U^T A V &= D && / \quad {}^{-1} \\
\left(U^T A V\right)^{-1} &= D^{-1} && / \quad \text{Klammer auflösen} \\
V^{-1} A^{-1} U^{-T} &= D^{-1} && / \quad V^{-1}\text{und } U^{-T}\text{ersetzen} \\
V^T A^{-1} U &= D^{-1} && / \quad \text{mit } V \text{von links multiplizieren} \\
A^{-1} U &= V D^{-1} && / \quad \text{mit } U^T \text{von rechts multiplizieren} \\
A^{-1} &= V D^{-1} U^T
\end{aligned}
$$

Wir überlegen uns...

$$
\begin{aligned}
U^T A V &= D && / \quad {}^{-1} \\
\left(U^T A V\right)^{-1} &= D^{-1} && / \quad \text{Klammer auflösen} \\
V^{-1} A^{-1} U^{-T} &= D^{-1} && / \quad V^{-1} \text{und } U^{-T} \text{ersetzen} \\
V^T A^{-1} U &= D^{-1} && / \quad \text{mit } V \text{ von links multiplizieren} \\
A^{-1} U &= V D^{-1} && / \quad \text{mit } U^T \text{ von rechts multiplizieren} \\
A^{-1} &= V D^{-1} U^T
\end{aligned}
$$

Wir kennen A^{-1}!

Wir berechnen die Lösung des Problems

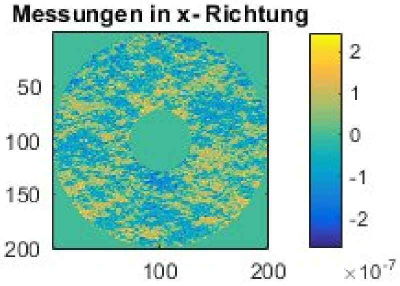
$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

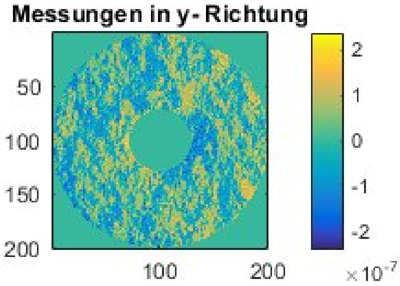
Jetzt können wir auch die Lösung x berechnen!

$$
x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

zurück zum Teleskop...

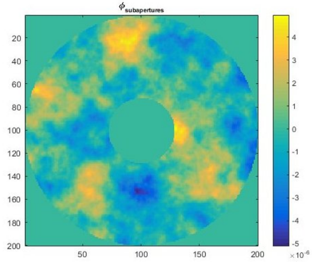
Wir möchten aus den Messungen





die einfallende Lichtwelle berechnen.

Die Lösung



- Wellenfront Rekonstruktion
- relativer Fehler 24.7206%
- Die größten Fehler treten am Rand des Ringes auf.