JKU

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

YOUNG SCIENTISTS

4 dimensionale komplexe Zahlen in der Computergrafik

Bastian Weiß
19. Mai 2017
INSTITUT FÜR ANGEWANDTE GEOMETRIE

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

Programm

Vorbereitung (Wiederholung)

- Komplexe Zahlen
- Vektoren

Quaternionen

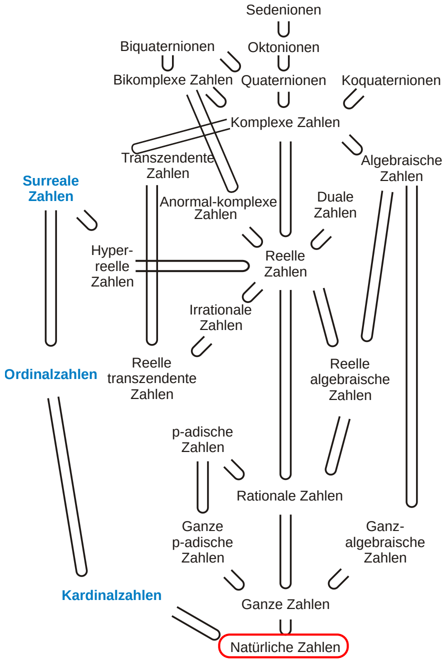
- Quaternionen mit Vektoren
- Rotation

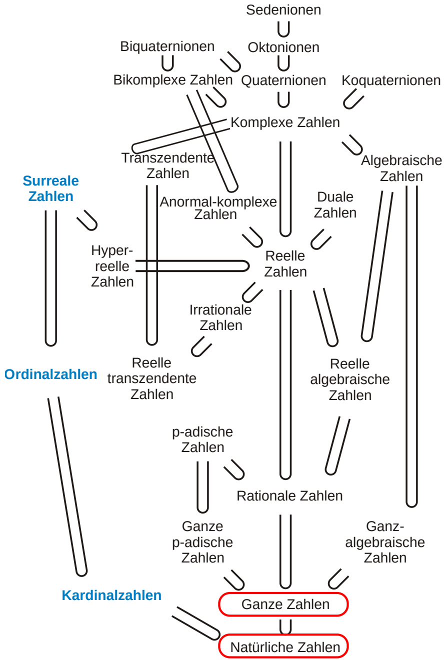
Duale Quaternionen

- Translation und Rotation

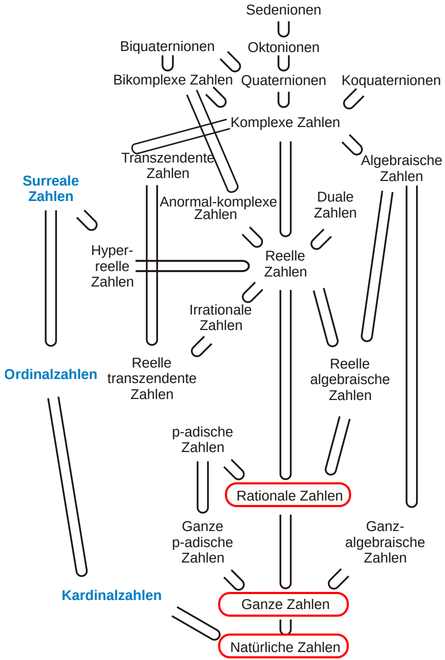
VORBEREITUNG (WIEDERHOLUNG)

- $\mathbb{N}$ – Objekte zählen

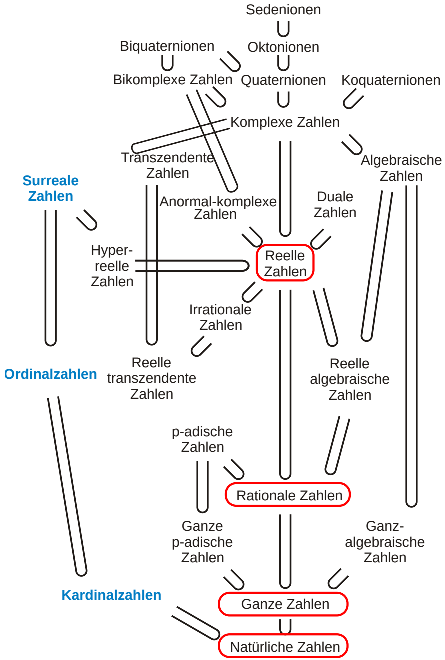




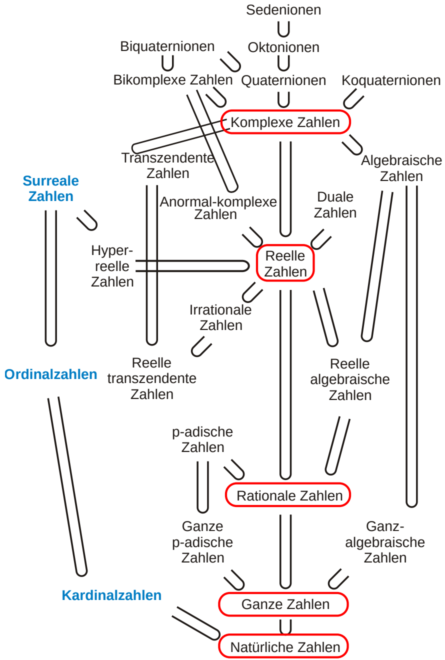
- $\mathbb{N}$ – Objekte zählen
- $\mathbb{Z}$ $\quad 2 + x = 1$



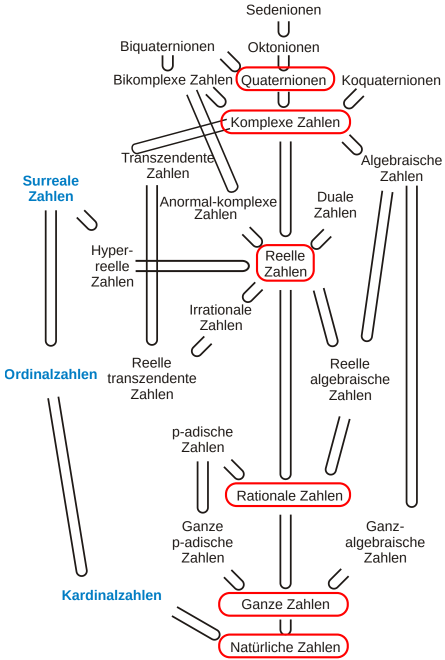
- $\mathbb{N}$ – Objekte zählen
- $\mathbb{Z}$ $\quad 2 + x = 1$
- $\mathbb{Q}$ $\quad 2x = 1$



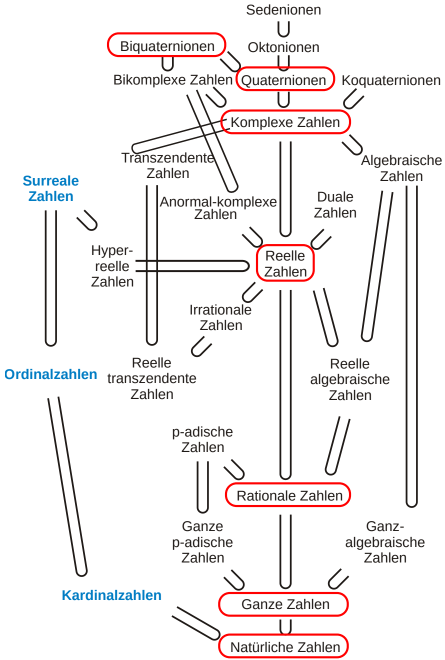
- $\mathbb{N}$ – Objekte zählen
- $\mathbb{Z}$ $\quad 2 + x = 1$
- $\mathbb{Q}$ $\quad 2x = 1$
- $\mathbb{R}$ $\quad x^2 = 2$



- $\mathbb{N}$ – Objekte zählen
- $\mathbb{Z}$ $\quad 2 + x = 1$
- $\mathbb{Q}$ $\quad 2x = 1$
- $\mathbb{R}$ $\quad x^2 = 2$
- $\mathbb{C}$ $\quad x^2 = -1$



- $\mathbb{N}$ – Objekte zählen
- $\mathbb{Z}$ $\quad 2 + x = 1$
- $\mathbb{Q}$ $\quad 2x = 1$
- $\mathbb{R}$ $\quad x^2 = 2$
- $\mathbb{C}$ $\quad x^2 = -1$
- $\mathbb{H}$



- $\mathbb{N}$ – Objekte zählen
- $\mathbb{Z}$ $\quad 2 + x = 1$
- $\mathbb{Q}$ $\quad 2x = 1$
- $\mathbb{R}$ $\quad x^2 = 2$
- $\mathbb{C}$ $\quad x^2 = -1$
- $\mathbb{H}$
- $\mathbb{H}^\varepsilon$

VORBEREITUNG (WIEDERHOLUNG)

KOMPLEXE ZAHLEN

Komplexe Zahlen

Kann die Gleichung

$$x^2 = -1$$

in den reellen Zahlen gelöst werden?

Komplexe Zahlen

Kann die Gleichung

$$x^2 = -1$$

in den reellen Zahlen gelöst werden?

Antwort: Nein

$\longrightarrow$ komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ mit der imaginären Einheit i.

Komplexe Zahlen

Kann die Gleichung

$$x^2 = -1$$

in den reellen Zahlen gelöst werden?

Durch $i^2 := -1$ gibt es in den komplexen Zahlen sogar zwei Lösungen: $x_1 = i, x_2 = -i$.

$$\begin{aligned} x_1^2 &= i^2 && = -1 \\ x_2^2 &= (-i)^2 = (-1)^2 i^2 && = -1 \end{aligned}$$

Eigenschaften komplexer Zahlen

Für die komplexe Zahl $a + ib = z \in \mathbb{C}$ gilt:

Realteil $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$

Imaginärteil $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$

Imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$

Addition $z \pm (x + iy) = (a + x) \pm i(b + y)$

Multiplikation $z(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$

Konjugation $\bar{z} = a - ib$

Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Übung 1: Komplexe Zahlen

Sei $u = 3 + 2i$ und $v = -i$:

a) $u + v$

b) $v - u$

c) $\Im(v)$

d) uv

e) $|v|$

f) $\bar{u}$

g) Gilt $ww' = w'w$ in $\mathbb{C}$?

h) $\frac{u}{v}$

Rotationen

Beispiel: Rotation mit komplexen Zahlen

Sei $z = 1 + i$. Dann kann die Multiplikation mit $i, -i$

$$\begin{aligned} zi &= (1+i)i && = -1 + i \\ &\text{und} \\ z(-i) &= (1+i)(-i) && = 1 - i \end{aligned}$$

als Rotation betrachtet werden.

$\longleftarrow$

JKU

Rotationen

Definition

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann um den Ursprung, im mathematisch positiven Sinn, mit dem Winkel α durch

$$z' = z r_\alpha$$

rotiert werden. Dabei ist $r_\alpha = \cos\alpha + i \sin\alpha$

Übung 2: Rotation mit komplexen Zahlen

a) Zeige, dass $|r_\alpha| = 1$ ist. Warum ist das wichtig?

b) Wie lautet r_α um ein $z \in \mathbb{C}$ $\frac{\pi}{4}$ im/gegen Uhrzeigersinn zu drehen?

c) Berechne $z' = (-1 + i)r_\alpha$ mit r_α aus b).

d) Warum muss $r_0 = r_{2\pi} = 1$ sein?

e) Wird mit $r_\alpha z$ und $z r_\alpha$ die gleiche Rotation durchgeführt?

f) Ist $r_{\alpha+\beta} = r_\alpha r_\beta$.

VORBEREITUNG (WIEDERHOLUNG)

VEKTOREN

Vektoren

Für zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

Skalarprodukt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

Länge $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$

Einheitsvektor $|\vec{u}| = 1$

Kreuzprodukt $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$

Hilfreich ist außerdem $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ und dass $|\vec{u} \times \vec{v}|$ dem Flächeninhalt des durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erzeugten Parallelogramm entspricht.

Übung 3: Rechnen mit Vektoren

Seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

a) $\vec{u} - \vec{v}$

b) $|\vec{v}|$

c) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$

d) Argumentiere $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$

JKU

QUATERNIONEN

Was sind Quaternionen?

Definition

Die Menge der Quaternionen ist durch

$$\mathbb{H} = \{x_0 + x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k} \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

gegeben, außerdem definieren wir eine komponentenweise Addition und eine Multiplikation durch

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

Geschichte: Wer hat’s erfunden?

Sir William Rowan Hamilton (* 4. August 1805 in Dublin; † 2. September 1865 in Dunsink bei Dublin) war ein irischer Mathematiker und Physiker.

(https://de.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton)

Übung 4: Rechnen mit Quaternionen

Seien $\mathbf{p} = 2 + \mathrm{i} - 2\mathrm{k}$, $\mathbf{q} = \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k} \in \mathbb{H}$.

a) $\mathbf{q} - 5$

b) $\mathbf{p} + \mathbf{q}$

c) $\mathbf{p} - \mathbf{q}$

d) $\mathbf{q} - 2\mathbf{p}$

e) ij

f) ji

g) iki

h) kik

i) $\mathbf{qp}$

j) $\mathbf{pq}$

Was haben wir gelernt?

Die Quaternionenmultiplikation ist nicht kommutativ. Das heißt im Allgemeinen ist

$$\mathbf{pq} \neq \mathbf{qp}$$

und aus der Regel $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ij} &= \mathrm{k} & \qquad \mathrm{ji} &= -\mathrm{k} \\ \mathrm{jk} &= \mathrm{i} & \qquad \mathrm{kj} &= -\mathrm{i} \\ \mathrm{ki} &= \mathrm{j} & \qquad \mathrm{ik} &= -\mathrm{j} \end{aligned}$$

$\longleftarrow$

JKU

QUATERNIONEN

QUATERNIONEN MIT VEKTOREN

Vektorschreibweise

Quaternionen lassen sich als Real + Vektoranteil auffassen. Dabei wird $\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$ als

$$\mathbf{q} = q_0 + \vec{q} = q_0 + \left(\begin{smallmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{smallmatrix}\right)$$

ausgedrückt. Es gelten weiterhin die komponentenweise Addition und eine Multiplikation durch

$$\mathbf{qp} = (q_0 + \vec{q})(p_0 + \vec{p}) = p_0 q_0 - \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + p_0 \vec{q} + \vec{p} q_0 + \vec{q} \times \vec{p}.$$

Weitere Definitionen

Für die Quaternion $\mathbf{q} = q_0 + \vec{q}$ definieren wir:

Betrag $|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + |\vec{q}|^2}$

Konjugation $\bar{\mathbf{q}} = q_0 - \vec{q}$

Einheitsquaternion $|\mathbf{q}| = 1$

Die Menge der Einheitsquaternionen wird mit $\mathbb{H}_1$ bezeichnet.

Inverse $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}$

Übung 5: Rechnen mit Quaternionen 2

Seien $\mathbf{p} = 2 + \mathrm{i} - 2\mathrm{k}$, $\mathbf{q} = \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$.

a) $p_0 + \vec{p}$

b) $q_0 + \vec{q}$

c) $\mathbf{p}(\mathrm{k} + \mathrm{i})^{-1}$

d) $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}$

e) $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{x}}$

f) $\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$

g) $\mathbf{p}\mathbf{p}^{-1}$

h) $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{x}^{-1}$

i) $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{x}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

j) $(\mathbf{x}^{-1})^{-1}$

Zusammenfassung

Für Quaternionen $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ und $\mathbf{r}$ gelten die üblichen aus $\mathbb{C}$ bekannsten Rechenregeln d.h.

- $(\mathbf{qp})\mathbf{r} = \mathbf{q}(\mathbf{pr})$
- $\mathbf{q}(\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \mathbf{qp} + \mathbf{qr}$
- $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{x}\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$
- $(\mathbf{x}^{-1})^{-1} = \mathbf{x}$

Aber

$$\mathbf{qp} \neq \mathbf{pq}$$

QUATERNIONEN

ROTATION

Rotation mit Quaternionen

Definition

Die Rotation von $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ um die Achse $\vec{n} \in \mathbb{R}^3, |\vec{n}| = 1$ und den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ wird durch

$$\vec{v}' = \mathbf{q}_\alpha \vec{v} \mathbf{q}_\alpha^{-1}$$

im mathematisch negativen Sinn $\circlearrowright$ beschrieben. Dabei gilt $\mathbf{q}_\alpha = \cos(\frac{\alpha}{2}) + \vec{n}\cos(\frac{\alpha}{2})$.

Übung 6: Rotation mit Quaternionen

a) Zeige, dass $|\mathbf{q}_\alpha| = 1$, also $\mathbf{q}_\alpha \in \mathbb{H}_1$ ist.

b) Wie lautet $\mathbf{q}_\alpha$ für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

c) Berechne $\vec{v}' = \mathbf{q}_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}_\alpha^{-1}$ mit $\mathbf{q}_\alpha$ aus b).

d) Wie lässt sich ein beliebiges $\vec{v}' = \mathbf{q}_\alpha \vec{v} \mathbf{q}_\alpha^{-1}$ zurück zu $\vec{v}$ drehen?

e) $(\mathbf{q}\mathbf{p})^{-1} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{q}^{-1}$ für $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{H}_1$

Warum ist die Multiplikation in $\mathbb{H}$ nicht kommutativ?

Warum gilt nicht $\mathbf{qp} = \mathbf{pq}$

Warum ist die Multiplikation in $\mathbb{H}$ nicht kommutativ?

Warum gilt nicht $\mathbf{qp} = \mathbf{pq}$
$\longrightarrow$ Weil Rotationen nicht vertauschbar sind.

Beispiel

Dreht man den Punkt $A = (1, 0, 0)$ erst mit $\frac{\pi}{2}$ um die x-Achse und dann mit dem gleichen Winkel um die z-Achse ergibt sich

Warum ist die Multiplikation in $\mathbb{H}$ nicht kommutativ?

Warum gilt nicht $\mathbf{qp} = \mathbf{pq}$

$\longrightarrow$ Weil Rotationen nicht vertauschbar sind.

Beispiel

Dreht man den Punkt $A = (1, 0, 0)$ erst mit $\frac{\pi}{2}$ um die x-Achse und dann mit dem gleichen Winkel um die z-Achse ergibt sich $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – andersherum erhält man

Warum ist die Multiplikation in $\mathbb{H}$ nicht kommutativ?

Warum gilt nicht $\mathbf{qp} = \mathbf{pq}$
$\longrightarrow$ Weil Rotationen nicht vertauschbar sind.

Beispiel

Dreht man den Punkt $A = (1, 0, 0)$ erst mit $\frac{\pi}{2}$ um die x-Achse und dann mit dem gleichen Winkel um die z-Achse ergibt sich $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – andersherum erhält man $A'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Übung 7: Vertauschbarkeit von Rotationsquaternionen

Seien $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta \in \mathbb{H}_1$ mit identischer Rotationsachse.

a) $\mathbf{q}_\alpha \mathbf{q}_\beta = \mathbf{q}_\beta \mathbf{q}_\alpha$

b) $\mathbf{q}_\alpha \mathbf{q}_\beta = \mathbf{q}_{\alpha+\beta}$

Hinweis:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Werden Quaternionen wirklich benutzt?

Ja schon ... etwas

Bibliotheken boost, Irrlicht, OpenSceneGraph, Eigen

$\longleftarrow$

Werden Quaternionen wirklich benutzt?

Ja schon ... etwas

Bibliotheken boost, Irrlicht, OpenSceneGraph, Eigen

Speichereffizienz Matrix (3×3), Quaternion $(1 + 3)$

$\longleftarrow$

Werden Quaternionen wirklich benutzt?

Ja schon ... etwas

Bibliotheken boost, Irrlicht, OpenSceneGraph, Eigen

Speichereffizienz Matrix (3×3), Quaternion $(1 + 3)$

Interpolation $slerp(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{p})^t$ für $t \in [0, 1]$ (**s**pherical **l**inear int**erp**olation)

$\longleftarrow$

JKU

DUALE QUATERNIONEN

Rotation, schön und jetzt?

- Bisher haben wir Rotationen jedoch keine Translationen (Verschiebungen) betrachtet.
- Translationen lassen sich mit Hilfe von dualen Quaternionen darstellen und berechnen.

$\longleftarrow$ Nicht Vertauschbarkeit von Rotation und Translation.

DUALE QUATERNIONEN

TRANSLATION UND ROTATION

Duale Quaternionen

Definition

Eine duale Quaternion $\mathbf{Q}$ ist ein Element der Menge

$$\mathbb{H}^{\varepsilon} := \{\mathbf{q_0} + \varepsilon \mathbf{q_1} \mid \mathbf{q_0}, \mathbf{q_1} \in \mathbb{H}\}.$$

Die duale Einheit hat die Eigenschaft, dass $\varepsilon^2 = 0$ ist aber $\varepsilon \neq 0$.

Addition und Multiplikation in $\mathbb{H}^\varepsilon$

Seien $\mathbf{Q}, \mathbf{P} \in \mathbb{H}^\varepsilon$.

Addition

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} + \mathbf{P} &= (\mathbf{q_0} + \varepsilon \mathbf{q_1}) + (\mathbf{p_0} + \varepsilon \mathbf{p_1}) \\ &= (\mathbf{q_0} + \mathbf{p_0}) + \varepsilon(\mathbf{q_1} + \mathbf{p_1})\end{aligned}$$

Addition und Multiplikation in $\mathbb{H}^\varepsilon$

Seien $\mathbf{Q}, \mathbf{P} \in \mathbb{H}^\varepsilon$.

Multiplikation

$$\begin{aligned} \mathbf{QP} &= (\mathbf{q_0} + \varepsilon \mathbf{q_1})(\mathbf{p_0} + \varepsilon \mathbf{p_1}) \\ &= \mathbf{q_0 p_0} + \varepsilon(\mathbf{q_0 p_1} + \mathbf{q_1 p_0}) \end{aligned}$$

Konjugation und Einbettung

Eine duale Quaternion $\mathbf{Q} = \mathbf{q_0} + \varepsilon \mathbf{q_1}$ wird konjugiert, indem man beide Quaternionen konjugiert und das Vorzeichen des Dualanteils wechselt.

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{q_0}} - \varepsilon \bar{\mathbf{q_1}}$$

Konjugation und Einbettung

Eine duale Quaternion $\mathbf{Q} = \mathbf{q_0} + \varepsilon \mathbf{q_1}$ wird konjugiert, indem man beide Quaternionen konjugiert und das Vorzeichen des Dualanteils wechselt.

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{q_0}} - \varepsilon \bar{\mathbf{q}}_\mathbf{1}$$

Ein Punkt wird durch seinen Ortsvektor $\vec{v}$ mit

$$(1 + \vec{0}) + \varepsilon(0 + \vec{v}) = 1 + \varepsilon \vec{v}$$

in eine duale Quaternion eingebettet.

Spezielle duale Quaternionen: Rotation

Eine reine Rotation wird dann mit der dualen Rotationsquaternion $\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha$ und

$$\mathbf{Q}_\alpha(1 + \varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_\alpha =$$

ausgedrückt.

Spezielle duale Quaternionen: Rotation

Eine reine Rotation wird dann mit der dualen Rotationsquaternion $\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha$ und

$$\mathbf{Q}_\alpha(1 + \varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha(1 + \varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{q}}_\alpha$$

ausgedrückt.

Spezielle duale Quaternionen: Rotation

Eine reine Rotation wird dann mit der dualen Rotationsquaternion $\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\alpha (1 + \varepsilon \vec{v}) \bar{\mathbf{Q}}_\alpha &= \mathbf{q}_\alpha (1 + \varepsilon \vec{v}) \bar{\mathbf{q}}_\alpha \\ &= \mathbf{q}_\alpha \bar{\mathbf{q}}_\alpha + \varepsilon \mathbf{q}_\alpha \vec{v} \bar{\mathbf{q}}_\alpha \end{aligned}$$

ausgedrückt.

Spezielle duale Quaternionen: Rotation

Eine reine Rotation wird dann mit der dualen Rotationsquaternion $\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha$ und

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_\alpha(1+\varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_\alpha &= \mathbf{q}_\alpha(1+\varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{q}}_\alpha \\ &= \mathbf{q}_\alpha\bar{\mathbf{q}}_\alpha + \varepsilon\mathbf{q}_\alpha\vec{v}\bar{\mathbf{q}}_\alpha \\ &= 1+\varepsilon\vec{v}'\end{aligned}$$

ausgedrückt.

Spezielle duale Quaternionen: Translation

Zur Darstellung einer Translation mit dualen Quaternionen setzt man $\mathbf{Q}_t = 2 + \varepsilon \vec{t}$ und erhält

$$\mathbf{Q}_t (1 + \varepsilon \vec{v}) \bar{\mathbf{Q}}_t =$$

Spezielle duale Quaternionen: Translation

Zur Darstellung einer Translation mit dualen Quaternionen setzt man $\mathbf{Q}_t = 2 + \varepsilon\vec{t}$ und erhält

$$\mathbf{Q}_t(1 + \varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_t = (2 + \varepsilon\vec{t})(1 + \varepsilon\vec{v})(2 + \varepsilon\vec{t})$$

JKU

Spezielle duale Quaternionen: Translation

Zur Darstellung einer Translation mit dualen Quaternionen setzt man $\mathbf{Q}_t = 2 + \varepsilon\vec{t}$ und erhält

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_t(1+\varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_t &= (2+\varepsilon\vec{t})(1+\varepsilon\vec{v})(2+\varepsilon\vec{t}) \\ &= (2+\varepsilon\vec{t})(2+\varepsilon\vec{t}+2\varepsilon\vec{v})\end{aligned}$$

JKU

Spezielle duale Quaternionen: Translation

Zur Darstellung einer Translation mit dualen Quaternionen setzt man $\mathbf{Q}_t = 2 + \varepsilon\vec{t}$ und erhält

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_t(1+\varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_t &= (2+\varepsilon\vec{t})(1+\varepsilon\vec{v})(2+\varepsilon\vec{t}) \\
&= (2+\varepsilon\vec{t})(2+\varepsilon\vec{t}+2\varepsilon\vec{v}) \\
&= 4+4\varepsilon(\vec{t}+\vec{v})
\end{aligned}$$

Spezielle duale Quaternionen: Translation

Zur Darstellung einer Translation mit dualen Quaternionen setzt man $\mathbf{Q}_t = 2 + \varepsilon\vec{t}$ und erhält

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_t(1+\varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_t &= (2+\varepsilon\vec{t})(1+\varepsilon\vec{v})(2+\varepsilon\vec{t}) \\
&= (2+\varepsilon\vec{t})(2+\varepsilon\vec{t}+2\varepsilon\vec{v}) \\
&= 4+4\varepsilon(\vec{t}+\vec{v}) \\
&= 1+\varepsilon(\vec{t}+\vec{v})
\end{aligned}$$

Übung 8: Translation und Rotation

Seien $\mathbf{Q}_t = 2 + \varepsilon\vec{t}$ und $\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha$.

a) $\mathbf{Q}_{t\alpha} = \mathbf{Q}_t\mathbf{Q}_\alpha$

b) $\mathbf{Q}_{\alpha t} = \mathbf{Q}_\alpha\mathbf{Q}_t$

c) $\mathbf{Q}_{t\alpha}(1 + \varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_{t\alpha}$

d) $\mathbf{Q}_{\alpha t}(1 + \varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_{\alpha t}$

e) $\mathbf{Q}_{t_1}\mathbf{Q}_{t_2} = \mathbf{Q}_{t_1+t_2}$

In welcher Reihenfolge werden in c) und d) Translation und Rotation ausgeführt?

Was mache ich jetzt damit?

Bibliotheken MathWorks, libdq

Effizienz

- **Speicher** Vorteil für duale Quaternionen (Matrix 4×4, duale Quaternion $4 + 4$).
- **Verkettung** Vorteil für duale Quaternionen.
- **Ausführung** Vorteil für Matrizen.

Interpolation $ScLERP(\mathbf{Q}_s, \mathbf{Q}_e, t) = \mathbf{Q}_s(\mathbf{Q}_s^{-1}\mathbf{Q}_e)^t$ für $t \in [0, 1]$
(**Sc**rew **l**inear int**erp**olation)

Was verschweige ich?

Homogene Koordinaten $4 + 4\varepsilon(\vec{t} + \vec{v}) = 1 + \varepsilon(\vec{t} + \vec{v})$

Was verschweige ich?

Homogene Koordinaten $4 + 4\varepsilon(\vec{t} + \vec{v}) = 1 + \varepsilon(\vec{t} + \vec{v})$

Duale Zahlen $a + \varepsilon b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Was verschweige ich?

Homogene Koordinaten $4 + 4\varepsilon(\vec{t} + \vec{v}) = 1 + \varepsilon(\vec{t} + \vec{v})$

Duale Zahlen $a + \varepsilon b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Quaternion Rotation Ist $\mathbf{q}_\alpha \vec{v} \mathbf{q}_\alpha{}^{-1}$ immer die gewünschte Rotation? Existiert $\mathbf{q}_\alpha{}^{-1}$ immer?

Noch Fragen?
Falls nicht – Tschüss