Übung 1: Komplexe Zahlen

Sei $u = 3 + 2i$ und $v = -i$:

a) $u + v$
b) $v - u$
c) $\Im(v)$
d) uv
e) $|v|$
f) $\bar{u}$
g) Gilt $ww' = w'w$ in $\mathbb{C}$?
h) $\frac{u}{v}$

Übung 2: Rotation mit komplexen Zahlen

a) Zeige, dass $|r_\alpha| = 1$ ist. Warum ist das wichtig?
b) Wie lautet r_α um ein $z \in \mathbb{C}$ $\frac{\pi}{4}$ im/gegen Uhrzeigersinn zu drehen?
c) Berechne $z' = (-1 + i)r_\alpha$ mit r_α aus b).
d) Warum muss $r_0 = r_{2\pi} = 1$ sein?
e) Wird mit $r_\alpha z$ und $z r_\alpha$ die gleiche Rotation durchgeführt?
f) Ist $r_{\alpha+\beta} = r_\alpha r_\beta$.

Übung 3: Rechnen mit Vektoren

Seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

a) $\vec{u} - \vec{v}$
b) $|\vec{v}|$
c) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$
d) Argumentiere $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$

Übung 4: Rechnen mit Quaternionen

Seien $\mathbf{p} = 2 + \mathrm{i} - 2\mathrm{k}$, $\mathbf{q} = \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k} \in \mathbb{H}$.

a) $\mathbf{q} - 5$
b) $\mathbf{p} + \mathbf{q}$
c) $\mathbf{p} - \mathbf{q}$
d) $\mathbf{q} - 2\mathbf{p}$
e) ij
f) ji
g) iki
h) kik
i) $\mathbf{qp}$
j) $\mathbf{pq}$

Übung 5: Rechnen mit Quaternionen 2

Seien $\mathbf{p} = 2 + \mathrm{i} - 2\mathrm{k}$, $\mathbf{q} = \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$.

a) $p_0 + \vec{p}$

b) $q_0 + \vec{q}$

c) $\mathbf{p}(\mathrm{k} + \mathrm{i})^{-1}$

d) $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}$

e) $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{x}}$

f) $\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$

g) $\mathbf{p}\mathbf{p}^{-1}$

h) $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{x}^{-1}$

i) $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{x}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

j) $(\mathbf{x}^{-1})^{-1}$

JKU

Übung 6: Rotation mit Quaternionen

a) Zeige, dass $|\mathbf{q}_\alpha| = 1$, also $\mathbf{q}_\alpha \in \mathbb{H}_1$ ist.

b) Wie lautet $\mathbf{q}_\alpha$ für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

c) Berechne $\vec{v}' = \mathbf{q}_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}_\alpha^{-1}$ mit $\mathbf{q}_\alpha$ aus b).

d) Wie lässt sich ein beliebiges $\vec{v}' = \mathbf{q}_\alpha \vec{v} \mathbf{q}_\alpha^{-1}$ zurück zu $\vec{v}$ drehen?

e) $(\mathbf{q}\mathbf{p})^{-1} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{q}^{-1}$ für $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{H}_1$

JKU

Übung 7: Vertauschbarkeit von Rotationsquaternionen

Seien $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta \in \mathbb{H}_1$ mit identischer Rotationsachse.

a) $\mathbf{q}_\alpha \mathbf{q}_\beta = \mathbf{q}_\beta \mathbf{q}_\alpha$

b) $\mathbf{q}_\alpha \mathbf{q}_\beta = \mathbf{q}_{\alpha+\beta}$

Hinweis:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

JKU

Übung 8: Translation und Rotation

Seien $\mathbf{Q}_t = 2 + \varepsilon\vec{t}$ und $\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha$.

a) $\mathbf{Q}_{t\alpha} = \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_\alpha$

b) $\mathbf{Q}_{\alpha t} = \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{Q}_t$

c) $\mathbf{Q}_{t\alpha}(1 + \varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_{t\alpha}$

d) $\mathbf{Q}_{\alpha t}(1 + \varepsilon\vec{v})\bar{\mathbf{Q}}_{\alpha t}$

e) $\mathbf{Q}_{t_1}\mathbf{Q}_{t_2} = \mathbf{Q}_{t_1+t_2}$

In welcher Reihenfolge werden in c) und d) Translation und Rotation ausgeführt?

JKU