Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Matheseminar 2017

Daniel Jodlbauer

9. Juni 2017

Überblick

- Motivation
- Voraussetzungen / Wiederholung
- Differentialgleichungen
- Lösungsverfahren

Differentialgleichungen ?

- Differenzialgleichung ... Gleichung mit Ableitungen
- Gleichung:
$$x + x^2 = e^x$$
- Ableitung/Änderung:
$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$
- DGL:
$$f''(t) + f(t)^2 = sin(t)$$

Warum brauchen wir so etwas?

- Physik: können bestimmte Zustände nicht direkt beschreiben, sondern nur deren Änderung (= Ableitung)
- Viele Modelle für physikalische Ereignisse bestehen aus DGLs:
  - Freier Fall
  - Pendel
  - Temperaturverteilung
  - Bewegung von Körpern, Flüssigkeiten, ...
  - ... vieles mehr

Numerik - was ist das ?

- Können manche Probleme nicht per Hand lösen
- Benötigen aber trotzdem die Lösung $\rightarrow$ Näherungslösung
- Wichtige Fragen:
  - Wie berechnet man eine Näherung?
    $\rightarrow$ numerische Verfahren, Algorithmen
  - Wie "nahe" ist die Näherung?
    $\rightarrow$ Theorie, Experimente

Numerik: Probleme mithilfe des Computers näherungsweise lösen.

Wiederholung

- Differenzenquotient
- Differenzieren / Ableiten
- Integrieren

Wiederholung: Differenzenquotient

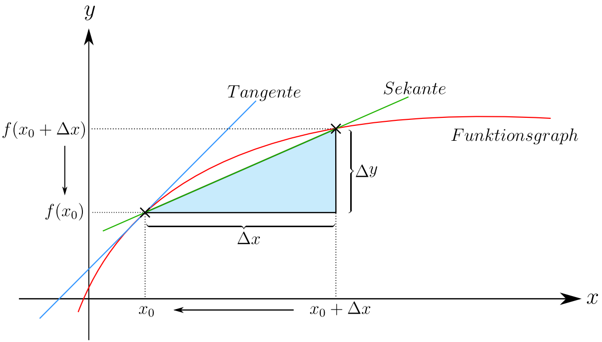
- Ableitung = Änderung (Steigung)

  Beispiel: Änderung der Geschwindigkeit = Beschleunigung

- Steigung einer Geraden = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Geometrisch:

  Nähern f durch eine Gerade an (Sekante)
  Steigung = Durchschnittliche Steigung von x_0 bis $x_0 + \Delta x$

  Keine Information über tatsächliche Änderung (Momentangeschwindigkeit)



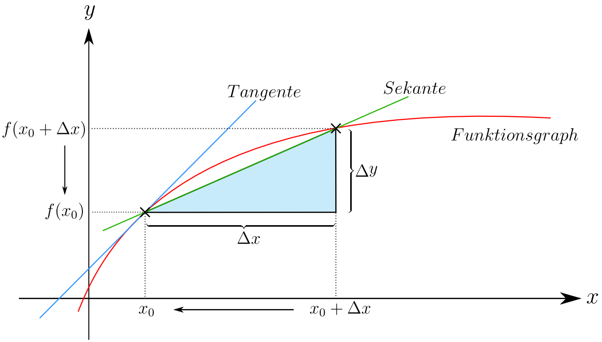
Wiederholung: Differenzenquotient

Mathematisch ausgedrückt:

$$\text{Steigung der Gerade} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Wollen Momentangeschwindigkeit ermitteln:

  Idee: Δx kleiner machen



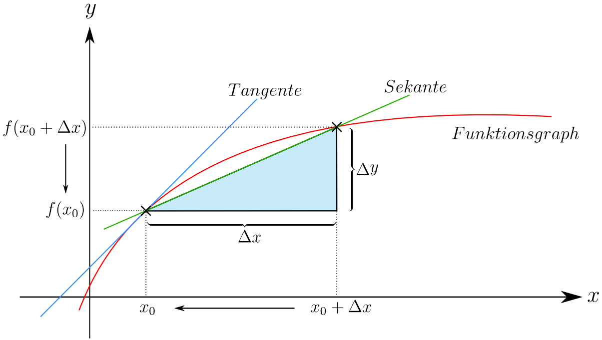
Wiederholung: Ableitung

Mathematisch ausgedrückt:

$$\text{Steigung der Funktion} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =: f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

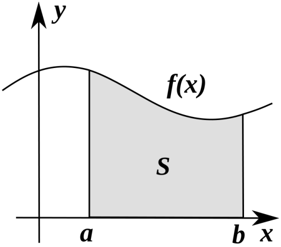
Geometrisch:

Differenzenquotient = Steigung der Sekante
Ableitung = Steigung der Tangente



Wiederholung: Integration

- Fläche unter einer Funktion



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

- Gegenstück zum Ableiten:

$$\int f' dx = f + C$$

- Bzw.

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

Beispiel: Integration

$f(x) = 2x$

$$\int 2x \; dx = x^2 + C$$

$$\int_0^1 2x \; dx = x^2|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

Kontrolle durch Ableiten

Überblick

- "Einfache" Differentialgleichungen
- Numerische Integration
- Euler-Verfahren
- Differentialgleichungen 2. Ordnung
- Erweiterungen / Verbesserungen
- Beispiel: Federpendel

Differentialgleichungen

- Gleichung: finde **Zahl** x mit

$$x^2 + \frac{1}{2}x = 5$$

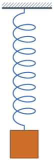
- Lösung durch ausprobieren, quadratische Lösungsformel, ...
- Gleichung mit Ableitungen: finde **Funktion** $u(t)$ mit:

$$u'(t) + u(t) = 5$$

- Lösung = ???

Warum Differentialgleichungen?

- Physik: oftmals ist es leichter zu beschreiben wie sich etwas ändert, anstatt die Größe direkt anzugeben
- $\rightarrow$ die meisten Modelle in der Physik bestehen aus Differentialgleichungen (Ableitung = Änderung)
- Beispiel Federpendel:



$$u''(t) + u(t) = 0$$

u'' = Zweite Ableitung = Änderung der Änderung (Bsp: Weg'' = Geschwindigkeit' = Beschleunigung)

Differentialgleichungen

- Einfaches Beispiel: Bewegung mit vorgegebener Geschwindigkeit $v(t)$.
- Wie weit sind wir zum Zeitpunkt t gegangen, wenn wir uns mit Geschwindigkeit $v(t)$ bewegen?
- DGL: Änderung des Weges = Geschwindigkeit

$$w'(t) = v(t)$$

- Benötigen Startpunkt (Anfangsbedingung): Bsp:

$$w(0) = 0$$

Differentialgleichungen

$$w'(t) = v(t) \text{ mit } w(0) = 0$$

- Lösungsidee: Gegenstück zu Differenzieren = Integrieren
  $\rightarrow$ integrieren beide Seiten der DGL

$$\int_0^t w'(\tau)d\tau = \int_0^t v(\tau)d\tau$$

$$w(t) - w(0) = \int_0^t v(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow w(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau$$

Beispiel 1

- $v(t) = -t$
- DGL: Finde Funktion w, sodass

$$w'(t) = -t$$

mit $w(0) = 5$

$$\begin{aligned} w(t) &= w(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau \\ &= 5 + \int_0^t (-\tau) d\tau = 5 - \frac{1}{2} t^2 \end{aligned}$$

- Lösung der Differenzialgleichung: $w(t) = 5 - \frac{1}{2} t^2$
- Überprüfen: $w'(t) = -\frac{1}{2} 2t = -t$ ✓

Beispiel 2

- DGL: Finde Funktion w, sodass
$$w'(t) = t + \mathbf{w(t)}$$
mit $w(0) = 5$
- Also: $v(t) = t + \mathbf{w(t)}$

$$\begin{aligned} w(t) &= 5 + \int_0^t v(\tau) d\tau \\ &= 5 + \int_0^t [\tau + w(\tau)]\, d\tau = ??? \end{aligned}$$

- Wollen w ausrechnen, aber w kommt im Integral vor !
- $\Rightarrow$ können DGL nicht mehr nur durch Integrieren lösen

Was nun?

Idee:

- Wenn w nicht im Integral vorkommt ✓
- Wir kennen w an der Stelle 0
- Für kleines t ist (vielleicht) $w(t) \approx w(0)$ (Bsp: $t \leq 0.1$)

$\Rightarrow$ Ersetzen $w(\tau)$ im Integral durch $w(0)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow w(t) &\approx w(0) + \int_0^t [\tau + \mathbf{w(0)}]\, d\tau \\ &= 5 + \int_0^t [\tau + 5]\, d\tau = 5 + \frac{1}{2}t^2 + 5t \end{aligned} \tag{1}$$

- $w(0.1) \approx 5 + 0.5 + 0.05 = 5.55$ (exakter Wert wäre 5.53)

Was nun?

- Können nun $w(t)$ im Bereich $[0, 0.1]$ berechnen
  $\rightarrow$ wie die Lösung für größere t berechnen?
- Lösung: selbe Idee wie vorhin
- Wir kennen nun w zusätzlich an der Stelle 0.1
- Für $t \in [0.1, 0.2]$ gilt wieder näherungsweise $w(t) \approx w(0.1)$

  $\Rightarrow$ Ersetzen $w(\tau)$ im Integral durch $w(0.1)$:
  Wollen nun $w(0.2)$ berrechnen:

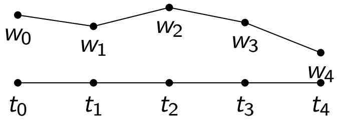
$$
\begin{aligned}
w(0.2) &\approx w(0.1) + \int_{\mathbf{0.1}}^{\mathbf{0.2}} (\tau + \mathbf{w(0.1)}) d\tau \\
&= 5.55 + \int_{0.1}^{0.2} (\tau + 5.55) d\tau \\
&= 5.55 + (\frac{1}{2}t^2 + 5.55t)|_{t=0.1}^{t=0.2} \\
&= 5.55 + 0.0705 = 5.6205
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Etwas allgemeiner

- Wollen die DGL
$$w'(t) = f(t, w(t))$$
mit $w(0) = w_0$ lösen

  1. $w(0) = w_0$
  2. $w(t_1) \approx w(0) + \int_0^{t_1} f(\tau, \mathbf{w(0)}) d\tau$
  3. $w(t_2) \approx w(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, \mathbf{w(t_1)}) d\tau$
  4. $w(t_3) \approx w(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} f(\tau, \mathbf{w(t_2)}) d\tau$
  5. ...

- Beispiel: $t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, \ldots, t_N = T$ (Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$)

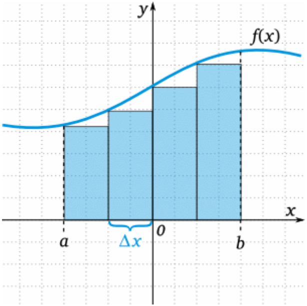


- Problem:
  Integrieren kann schwierig oder sogar unmöglich sein
  Müssen sehr viele Integrale berechnen (anstrengend)
- Abhilfe: Computer soll für uns Integrieren!

Numerische Integration

Ziel: wollen das Integral $\int_a^b f(x)dx$ berechnen.

Geometrische Überlegung:
Integral = Fläche unter der Funktion im Bereich $[a, b]$



Numerische Integration

1. Teile Intervall in kleinere (gleichgroße) Teile auf
2. Berechne Fläche der Rechtecke
3. Zusammenzählen

Präziser

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$x_1 = a, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad x_3 = x_2 + \Delta x, \ldots$

Anwenden auf unser Lösungsverfahren

- Wollen die DGL
$$w'(t) = f(t, w(t))$$
mit $w(0) = w_0$ lösen
- Zeitgitter: $t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, \ldots, t_N = 10.0$

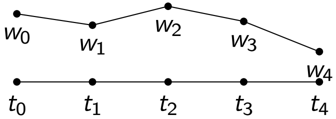
  1. $w(0) = w_0$
  2. $w(t_1) \approx w(0) + \int_0^{t_1} f(\tau, w(0))d\tau$
  3. $\ldots$

- Numerische Integration: benötigen Zerlegung für das Integral
Aber: Integrationsintervall ist bereits klein: $[0, t_1], [t_1, t_2]$
- Es genügt:
$$\int_0^{t_1} f(\tau, w(0))d\tau \approx f(0, w(0)) \cdot (t_1 - 0)$$

Euler Verfahren

- Wollen die DGL
$$w'(t) = f(t, w(t))$$
mit $w(0) = w_0$ lösen
- Zerlegung in gleich große Zeitschritte
  Beispiel: $\Delta t = 0.1 \implies t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, \ldots, t_N = 10.0$

  1. $w(0) = w_0$
  2. $w(t_1) \approx w(0) + \Delta t \cdot f(0, w(0))$
  3. $w(t_2) \approx w(t_1) + \Delta t \cdot f(t_1, w(t_1))$
  4. $w(t_3) \approx w(t_2) + \Delta t \cdot f(t_2, w(t_2))$
  5. $\ldots$
- $\rightarrow$ Liniendiagramm



Aufgaben

1. Überlege, wie die Lösung der Gleichung in 2. aussehen könnte! (wann bleibt die Lösung konstant, in welchem Bereich werden die Werte sein, Skizze, ...)
2. Berechne die ersten Näherungswerte für
$$w'(t) = w(t)(1 - w(t))$$
mit $w(0) = 0.1$ per Hand!
3. Implementiere das Eulerverfahren für die obige Gleichung! (z.B.: in Excel/Calc/Matlab/Octave/GeoGebra/..., Richtwerte: $\Delta t = 1, \Delta t = 0.1$, Zeit $[0, 10]$)
4. Alternativ: betrachte vorerst die einfacheren Gleichungen $w'(t) = 1$ oder $w'(t) = t$
5. Zeigt die berechnete Lösung das gewünschte Verhalten? (Vergleiche mit der exakten Lösung $w(t) = \frac{e^t}{9+e^t}$, bzw. überprüfe, ob dies wirklich die exakte Lösung ist!)

Euler Verfahren: Beispiel

- Wollen die DGL
$$w'(t) = w(t)(1 - w(t))$$
mit $w(0) = 0.1$ lösen
- Interpretation: Bakterienwachstum
- $\Delta t = 0.1 \implies t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, \ldots, t_N = 10.0$

1. $w(0) = 0.1$
2. $w(t_1) \approx 0.1 + 0.1 * 0.1 * (1 - 0.1) = 0.109$
3. $w(t_2) \approx 0.109 + 0.1 * 0.109 * (1 - 0.109) = 0.1187119$
4. $\ldots$

Euler Verfahren: Beispiel

$$w'(t) = w(t)(1 - w(t))$$

- Lösen mit Excel / Calc / ...

	A	B	C
1	t	$f(t, w(t))$	$w(t)$
2	0		**0.1**

Euler Verfahren: Beispiel

$$w'(t) = w(t)(1 - w(t))$$

- Lösen mit Excel / Calc / ...

	A	B	C
1	t	$f(t, w(t))$	$w(t)$
2	0	**= C2*(1-C2)**	0.1

Euler Verfahren: Beispiel

$$w'(t) = w(t)(1 - w(t))$$

- Lösen mit Excel / Calc / ...

	A	B	C
1	t	$f(t, w(t))$	$w(t)$
2	0	0.09	0.1
3	**0.1**		**= C2+0.1*B2** **= C2+(A3-A2)*B2**

Euler Verfahren: Beispiel

$$w'(t) = w(t)(1 - w(t))$$

- Lösen mit Excel / Calc / ...

	A	B	C
1	t	$f(t, w(t))$	$w(t)$
2	0	0.09	0.1
3	0.1	**=C3*(1-C3)**	0.109

Euler Verfahren: Beispiel

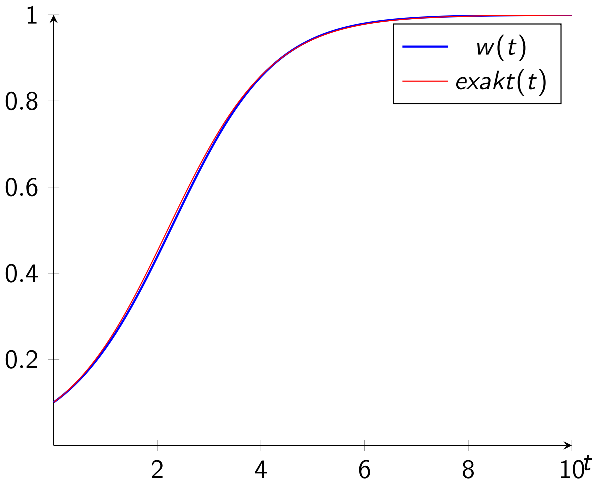
$$w'(t) = w(t)(1 - w(t))$$

- Lösen mit Excel / Calc / ...

	A	B	C
1	t	$f(t, w(t))$	$w(t)$
2	0	0.09	0.1
3	0.1	0.097119	0.109
4	0.2	0.1046193848	0.1187119
5	0.3	0.1124879579	0.1291738385
6	0.4	0.1207041181	0.1404226343
7	0.5	0.129238917	0.1524930461
8	...	...	...

Euler Verfahren: Beispiel

$$w'(t) = w(t)(1 - w(t))$$



Euler Verfahren: Beispiel

$\Rightarrow$ können die Lösung der Differentialgleichung näherungsweise mit Excel/Calc/etc berechnen!

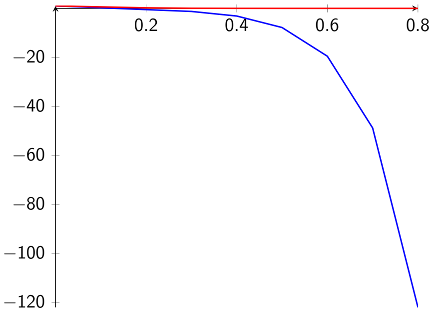
Fragen:

- Wie groß ist der Fehler den wir machen?
- Funktioniert dies mit jeder Differentialgleichung?
-

Funktioniert dies mit jeder Differentialgleichung?

- Leider nein:

$$w'(t) = -15w(t) \text{ mit } w(0) = 1$$



Was nun?

- Durch die Näherung $w(0.1) \approx w(0)$ machen wir in jedem Schritt Fehler
- $\rightarrow$ summieren sich auf
- Je kleiner Δt, desto kleiner der Fehler $\rightarrow$ Δt kleiner machen!
- **Aber:** hilft leider auch nicht immer und der Aufwand wird größer
- Benötigen bessere Verfahren

Differentialgleichungen 2. Ordnung

- Ordnung einer DGL = höchste Ableitung
- bisher "nur" $w'(t)$
- Viele DGLs beinhalten 2. Ableitung

$$w''(t) = a(t)$$

- Beispiel: Newton-Gesetz für Bewegung von Körpern

$$f = m\ w''$$

$$\text{Kraft} = \text{Masse} * \text{Beschleunigung}$$

- Noch schwieriger zu lösen?

Differentialgleichungen 2. Ordnung

- Noch schwieriger zu lösen?
- $\rightarrow$ Nein ! (zumindest nicht unbedingt)
- Können DGL 2.Ordnung in zwei DGL 1.Ordung umformen

$$u''(t) = f(t, u, \mathbf{u'})$$

- Neue unbekannte Funktion: $v(t) = u'(t)$
- 2 "neue" Differenzialgleichungen:

$$\mathbf{v}'(t) = f(t, u, \mathbf{v})$$
$$u'(t) = v(t)$$

- $\rightarrow$ System gekoppelter Differenzialgleichungen

Numerische Lösung

Genau so wie vorhin!

- Vektor-Schreibweise:
- Fassen u' und v' sowie f und v zu einem Vektor (Liste) zusammen

$$\vec{w}'(t) = \vec{F}(t, \vec{w})$$

mit

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}, \vec{w}' = \begin{bmatrix} v' \\ u' \end{bmatrix}, \vec{F} = \begin{bmatrix} f \\ v \end{bmatrix} \tag{3}$$

- Können das Euler-Verfahren auf die Vektor-DGL anwenden!

Euler Verfahren für Vektoren

- Wollen die DGL

$$\vec{w}'(t) = \vec{F}(t, \vec{w}(t))$$

  mit vorgegebenem $\vec{w}(0) = \vec{w}_0$ lösen.

- Achtung! $\vec{w}$ hat zwei Einträge $\Rightarrow$ benötigen zwei Anfangsbedingungen (Bsp: Startpunkt und Geschwindigkeit einer Bewegung)

- Zeitgitter mit Abstand Δt

  1. $\vec{w}(0) = \vec{w}_0$
  2. $\vec{w}(t_1) \approx \vec{w}(0) \; + \Delta t * \vec{F}(t, \vec{w}(0))$
  3. $\vec{w}(t_2) \approx \vec{w}(t_1) + \Delta t * \vec{F}(t, \vec{w}(t_1))$
  4. ...

Beispiel: Federpendel

- Wollen die Position (Auslenkung) $y(t)$ berechnen
- Newton: Kraft = Masse * Beschleunigung:

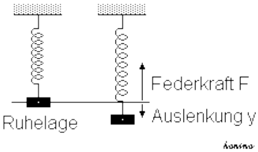
$$F = m \cdot y''$$

- Federkraft: je größer die Auslenkung, desto größer die Kraft:

$$F = -y$$

- Federn können unterschiedlich stark sein: $F = -\mathbf{D}y$
  D ... Federkonstante

$$y''(t) = -\frac{D}{m}y(t)$$



Aufgaben

$$y''(t) = -\frac{D}{m}y(t)$$

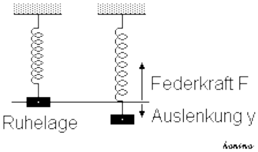
1. Forme die Differenzialgleichung für das Federpendel auf ein System um!
2. Überlege, wie die Lösung aussehen sollte!
3. Erweitere das Euler-Verfahren für dieses System (neue Datei)!
   Richtwerte: $\Delta t = 0.1$, Zeit $[0, 20]$, Startwerte $y(0) = 1, y'(0) = 0$
4. Kann die berechnete Lösung stimmen? Warum / Warum nicht?
5. ($*$) Wie könnte man das Verfahren verbessern? (Hinweis: funktioniert nur für Systeme)
6. Welche Einflüsse sind in der DGL nicht berücksichtigt worden? Wie könnte man diese hinzufügen und wie würde sich die Lösung verändern?

Aufgabe 1

$$y''(t) = -\frac{D}{m} y(t)$$

- Anfangsbedingungen:
  Auslenkung zu Beginn: $y(0) = y_0$
  Geschwindigkeit zu Beginn: $y'(0) = v_0$
- Umformen auf System

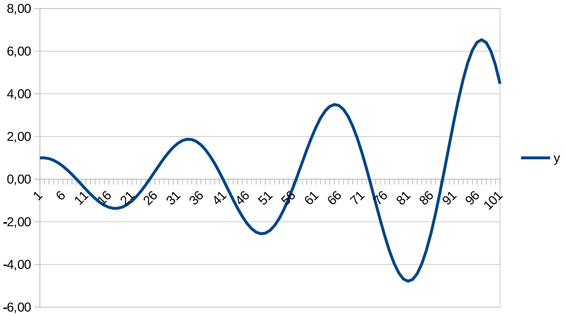
$$\begin{aligned} y'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -\frac{D}{m} y(t) \end{aligned}$$



Aufgabe 2-4

$$y''(t) = -\frac{D}{m} y(t)$$

- Erwartete Lösung: gleichmäßige Schwingung zwischen $[-1, 1]$
- Aber: Euler-Verfahren liefert:



- Schwingung wird immer stärker $\rightarrow$ physikalisch unmöglich!

Aufgabe 5

$$y'(t) = v(t)$$
$$v'(t) = -\frac{D}{m} y(t)$$

Euler-Verfahren

$$y(t_1) = y(t_0) + \Delta t \; v(t_0)$$
$$v(t_1) = v(t_0) + \Delta t \; (-\frac{D}{m} y(t_0))$$

Implementierung in Excel/Calc/...

	A	B	C
1	t	$y(t)$	$v(t)$
2	0	1	0
3	0.1	**=B2 + 0.1 * C2**	**=C2 + 0.1 * (-B2)**

Aufgabe 5

$$y'(t) = v(t)$$
$$v'(t) = -\frac{D}{m} y(t)$$

Euler-Verfahren

$$y(t_1) = y(t_0) + \Delta t \; v(t_0)$$

$$v(t_1) = v(t_0) + \Delta t \; (-\frac{D}{m} y(t_0))$$

In der zweiten Zeile verwenden wir die alte Näherung $y(t_0)$, obwohl wir in der ersten Zeile bereits die neue Näherung $y(t_1)$ berechnet haben! $\rightarrow$ verwende neuen Wert!

Aufgabe 5

$$y'(t) = v(t)$$
$$v'(t) = -\frac{D}{m}y(t)$$

Halbschritt-Verfahren

$$y(t_1) = y(t_0) + \Delta t \ v(t_0)$$

$$v(t_1) = v(t_0) + \Delta t \ (-\frac{D}{m} y(t_1))$$

Aufgabe 5

$$y'(t) = v(t)$$
$$v'(t) = -\frac{D}{m} y(t)$$

Halbschritt-Verfahren

$$y(t_1) = y(t_0) + \Delta t \; v(t_0)$$

$$v(t_1) = v(t_0) + \Delta t \; (-\frac{D}{m} y(t_1))$$

Aufgaben

- Modifiziere das Euler-Verfahren zum Halbschritt-Verfahren!
- Wie verändert sich die Lösung?
- Funktioniert das Halbschritt-Verfahren auch, wenn man die Gleichungen vertauscht?

Aufgabe 5

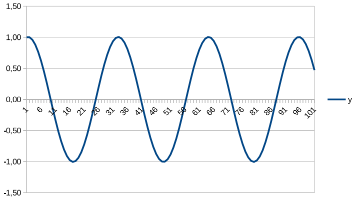
Implementierung in Excel/Calc/...

	A	B	C
1	t	$y(t)$	$v(t)$
2	0	1	0
3	0.1	=B2 + 0.1 * C2	=C2 + 0.1 * (-**B3**)

Oder

	A	B	C
3'	0.1	=B2 + 0.1 * **C3**	=C2 + 0.1 * (-B2)

$\rightarrow$ Lösung schwingt wie erwartet zwischen $[-1, 1]$!



Aufgabe 6

$$y''(t) = -\frac{D}{m} y(t)$$

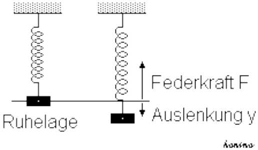
- Reibung: proportional zur Geschwindigkeit:

$$y''(t) = -\frac{D}{m} y(t) - \gamma \, y'(t)$$

- Antrieb (erzwungene Schwingung):

$$y''(t) = -\frac{D}{m} y(t) - \gamma \, y'(t) + F(t)$$

(Aufhängung bewegt sich)



Aufgaben

1. Erweitere das Programm um den Reibungsterm!
2. Experimentiere mit verschiedenen Parametern γ. Welche Verhaltensweisen treten auf?
3. Füge zusätzlich eine Antriebskraft $F(t) = sin(\omega t)$ hinzu! Was passiert für verschiedene Werte ω im Reibungsfreien Fall? (Betrachte die maximale Auslenkung für $\omega = 0.1, 0.5, 0.9, 1.0, 1.1, \ldots$)
4. Ist ein solches Verhalten realistisch?

Aufgabe 1-2: Gedämpfte Schwingungen

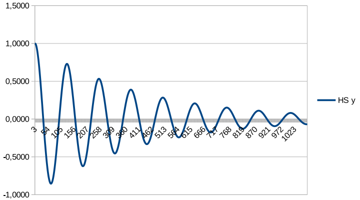


Figure: $\gamma = 0.1$

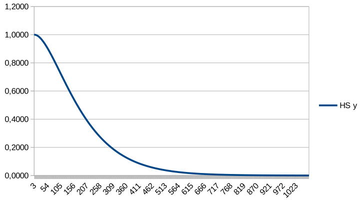


Figure: $\gamma = 2$

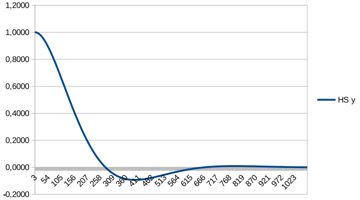


Figure: $\gamma = 1.2$

Aufgabe 3-4: Erzwungene Schwingungen

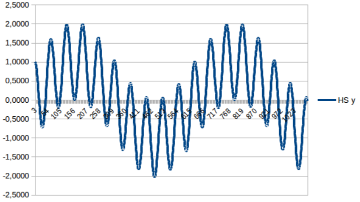


Figure: $\omega = 0.1$

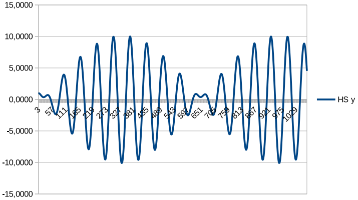


Figure: $\omega = 0.9$

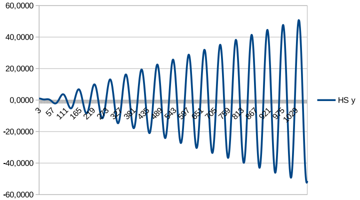


Figure: $\omega = 1$

Schwingungen werden stärker, je mehr sich ω der kritischen Frequenz 1 annähert, bzw. $\omega_R = \sqrt{(\frac{D}{m})^2 - 2\gamma^2}$ im allgemeinen Fall.

Aufgabe 3-4: Erzwungene Schwingungen

Ist das realistisch? $\rightarrow$ leider ja

Resonanzkatastrophe

Schwingungen schaukeln sich auf, können Brücken zum Einsturz bringen!

- Brücke
- Weinglas

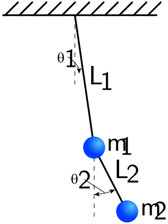
Ausblick

- Aufgabe: Doppelpendel
- Finite Differenzen Methode für partielle DGL

Ausblick: Doppelpendel

$$\theta_1'' = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)\left(\theta_1'^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \theta_2'^2\right) + g\sin(\theta_1 - 2\theta_2) + 3g\sin(\theta_1)}{\cos(2(\theta_1 - \theta_2)) - 3}$$

$$\theta_2'' = -\frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)\left(2\theta_1'^2 + \theta_2'^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2g\cos(\theta_1)\right)}{\cos(2(\theta_1 - \theta_2)) - 3}$$



Animation (Wikipedia)

Aufgaben

1. Umschreiben auf ein System 1.Ordnung
   (Wie viele Gleichungen / Unbekannte bekommen wir?)
2. $(*)$ Implementiere das Doppelpendel!
   (idealerweise in Matlab/Octave)

Methode der Finite Differenzen

Partielle Differenzialgleichung (Wärmeleitung):

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) = f(t,x)$$

- u hängt nun von 2 Variablen ab!
- $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$ … Ableitung nur nach t bzw. x
- Kurzschreibweise:

$$u_t - u_{xx} = f$$

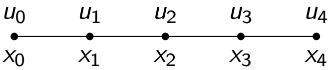
- Benötigen Anfangsbedingung und Randbedingung

$$u(0,x) = g(x) \tag{4}$$
$$u(t,0) = 0 \tag{5}$$
$$u(t,1) = 0 \tag{6}$$

- Zeit $[0, T]$, Ort $[0,1]$

Diskretisierung

- Betrachten vorerst nur
$$-u_{xx} = f$$
mit $u(0) = u(1) = 0$
- Gitter in x-Richtung



- Differenzenquotient für 2. Ableitung:
$$-u''(x_n) = -(u')'(x_n) \approx \frac{1}{\Delta x^2}(-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1})$$

Diskretisierung

$$-u_{xx} = f$$

Einsetzten für alle Knotenpunkte liefert

- $n = 0$: $-u_{-1} + 2u_0 - u_1 = f_0$
- $n = 1$: $-u_0 + 2u_1 - u_2 = f_1$
- $n = 2$: $-u_1 + 2u_2 - u_3 = f_2$
- $\dots$

(ignorieren Δx vorläufig ...)

Diskretisierung

$$-u_{xx} = f$$

Einsetzen für alle Knotenpunkte liefert

- $n = 0$: $-u_{-1} + 2u_0 - u_1 = f_0$
- $n = 1$: $-u_0 + 2u_1 - u_2 = f_1$
- $n = 2$: $-u_1 + 2u_2 - u_3 = f_2$
- ...

u_{-1} gibt es nicht! $\rightarrow$ weglassen

Diskretisierung

Können Gleichungen auch anders hinschreiben

$$
\begin{array}{ccccc}
+2u_0 & -1u_1 & & & = f_0 \\
-1u_0 & +2u_1 & -1u_2 & & = f_1 \\
 & -1u_1 & +2u_2 & -1u_3 & = f_2
\end{array}
\tag{7}
$$

Zu viel Schreibarbeit! Wir wissen: in der n-ten Spalte stehen nur u_n
$\rightarrow$ Schreiben nur die Koeffizienten auf!

$$
\frac{1}{\Delta x^2}
\begin{bmatrix}
+2 & -1 & & \\
-1 & +2 & -1 & \\
 & -1 & +2 & -1 \\
 & & \dots & \dots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \dots \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \end{bmatrix}
$$

$$K \cdot \vec{u} = \vec{f}$$

$K \dots$ Matrix
$\vec{u}, \vec{f} \dots$ Vektoren
$K \cdot u \dots$ Matrix-Vektor Produkt

Diskretisierung

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} +2 & -1 & & \\ -1 & +2 & -1 & \\ & -1 & +2 & -1 \\ & & \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Aber: wir kennen u_0 bereits durch Anfangs/Randbedingungen!
$\rightarrow$ benötigen die Gleichung für u_0 nicht, ersetzen sie durch $u_0 = 0$

(selbiges für $x = 1$)

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & & \\ -1 & +2 & -1 & \\ & -1 & +2 & -1 \\ & & \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Diskretisierung

Zurück zum ursprünglichen Problem

$$\partial_t u(t,x) - \partial_{x^2} u(t,x) = f(t,x)$$

Wissen von vorher (Diskretisierung in x-Richtung):

$$\begin{aligned} -\partial_{x^2} u(t,x) &\approx K\vec{u}(\mathbf{t}) \\ \vec{u}(\mathbf{t}) &= (u_0(\mathbf{t}), u_1(\mathbf{t}), \dots) \\ \vec{f}(\mathbf{t}) &= (f_0(\mathbf{t}), f_1(\mathbf{t}), \dots) \end{aligned}$$

Achtung! Da u von x UND t abhängt, hängt auch der diskretisierte Vektor $\vec{u}$ von t ab!

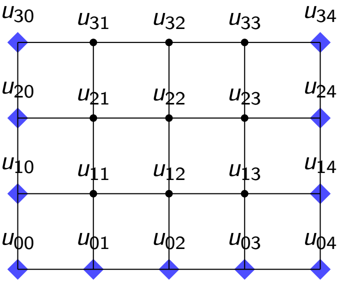
$$\Rightarrow \partial_t \vec{u}(t) + K\vec{u}(t) = \vec{f}(t)$$

…System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen in der Zeit (wie vorher) $\rightarrow$ können Euler-Verfahren wieder anwenden!

Finite Differenzen - Zusammenfassung

$$u_t - u_{xx} = f$$

Gitter in Ort und Zeit

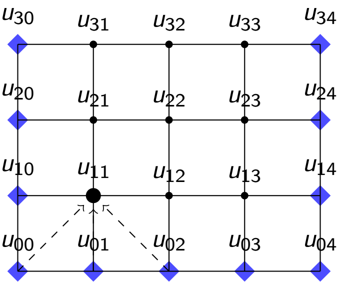


Kennen die blauen Punkte wegen Anfangs/Randbedingungen
Gleichung im Punkt x_j zum Zeitpunkt t_i:

$$\frac{1}{\Delta t}\left[u(t_i, x_j) - u(t_{i-1}, x_j)\right] +$$
$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[-u(t_i, x_{j-1}) + 2u(t_i, x_j) - u(t_i, x_{j+1})\right] = f(t_i, x_j)$$

Finite Differenzen - Zusammenfassung

$$u_t - u_{xx} = f$$



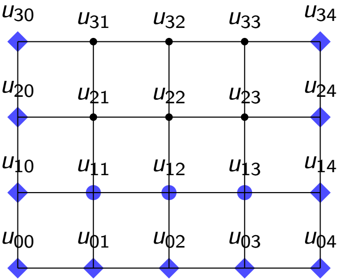
Beispiel: Gleichung für $i = j = 1$

$$\frac{1}{\Delta t}[u_{11} - u_{01}] + \frac{1}{\Delta x^2}[-u_{00} + 2u_{01} - u_{02}] = f_{11}$$

Kennen außer u_{11} alle Werte! $\rightarrow$ können u_{11} einfach berechnen.
Gleiches für u_{12} und u_{13}

Finite Differenzen - Zusammenfassung

$$u_t - u_{xx} = f$$



Kennen nun auch alle Werte im nächsten Zeitschritt t_1 $\rightarrow$ können die Werte für t_2 wie vorhin berechnen! usw, usw, ...

($*$) Aufgabe: implementieren! Achtung: $\Delta t < \frac{1}{2}\Delta x^2$

Zusammenfassung

- Euler-Verfahren zur Lösung von zeitabhängigen DGL
- Finite Differenzen + Euler für zeit und ortsabhängige DGL
- Euler-Verfahren ist oftmals nicht gut genug (benötigen kleines Δt)
- $\rightarrow$ Implizite Verfahren
- Finite Elemente Methoden

Ende!