Wie Mathematik die Wärme leitet

Matheseminar

Andreas Schafelner

Johannes Kepler Universität Linz

25.05.2018

Überblick

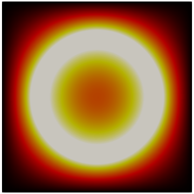
Was ist eigentlich Wärmeleitung?

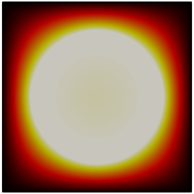
- Transfer von Wärme in oder zwischen Feststoffen/Flüssigkeiten/Gasen durch ***Kontakt***
- andere Formen der Wärmeübertragung
  - Wärmestrahlung: zB Ofen
  - Wärmekonvektion: zB Haarföhn

Ein paar Beobachtungen

- Wärme fließt immer von warm zu kalt
- in einem System ohne Wärmequellen verteilt sich die Wärme gleichmäßig

- verschiedene Materialien leiten Wärme unterschiedlich gut





- oft kombinierte Wärmeübertragung
  - zB Wärmeleitung + Wärmestrahlung

Beispiele

- Gute und schlechte Wärmeleiter
  - + Kupfer
  - + Silber
  - − Öl
  - − Luft
- Wärmeleitung im Alltag
  - Heckscheibenheizung im Auto
  - Kühlung von Komponenten in Smartphones
  - Isolierung eines Wasserkochers

Ein Problem

- wollen ein neues Produkt entwerfen zB eine neue Chipkühlung im Smartphone
- bauen also Prototypen und machen Experimente
  - teuer und aufwendig
- **Frage:** gibt es ein mathematisches/physikalisches Modell?
  - ***JA!***
  - brauchen vorher aber ein paar mathematische Grundlagen

Die Ableitung I

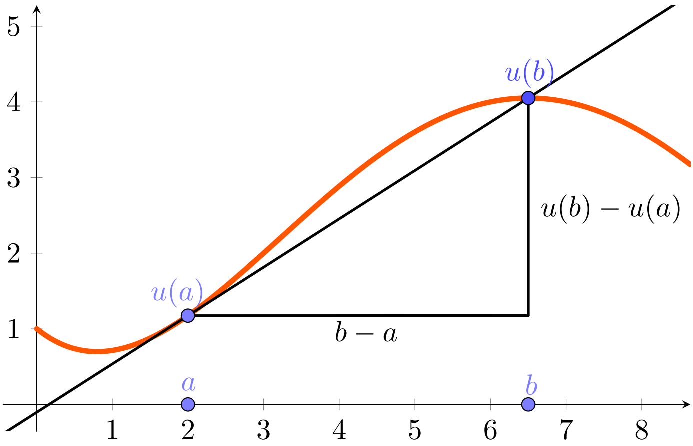
Betrachten Größe u über ein Zeitintervall $[a, b]$, zB Temperatur

- uns interessiert jetzt die ***(mittlere) Änderungsrate*** k über dieses Intervall
- also bilden wir den ***Differenzenquotienten***

$$k = \frac{u(b) - u(a)}{b - a}$$

- **Interpretation:** Steigung

Die Ableitung II



- Beispiel
  - u ist zurückgelegter Weg $\rightarrow$ k entspricht mittlerer Geschwindigkeit zwischen a und b

Die Ableitung III

- wollen aber Änderungsrate in einem Punkt a
- **Idee:** lassen b Richtung a wandern
- Mathematischer: bilden einen Grenzwert

$$\lim_{b \to a} \frac{u(b) - u(a)}{b - a}$$

- falls dieser ***Differentialquotient*** existiert, bezeichnen wir ihn mit $u'(a)$

$$u'(a) = \lim_{b \to a} \frac{u(b) - u(a)}{b - a}$$

- $u'(a)$ ist die ***Ableitung*** von u im Punkt a

Die Ableitung IV

- muss immer so ein Grenzwert gebildet werden?
  - Nein, es gibt Rechenregeln und Ableitungstabellen!
- zB

$$\begin{aligned}
u(t) &= c & \Rightarrow \quad u'(t) &= 0 \\
u(t) &= t^n & \Rightarrow \quad u'(t) &= n\, t^{n-1} \\
u(t) &= \sin(t) & \Rightarrow \quad u'(t) &= \cos(t) \\
u(t) &= \cos(t) & \Rightarrow \quad u'(t) &= -\sin(t)
\end{aligned}$$

- zweite Ableitung = Ableitung der Ableitung

$$u''(t) = (u')'(t)$$

Die Integration I

Frage: können wir die Ableitung/Differentiation umkehren?

- Ja, durch das ***Integral***
- abstrakt ("Stammfunktion")

$$\int f'(t)dt = f(t) + c$$

bzw mit Grenzen

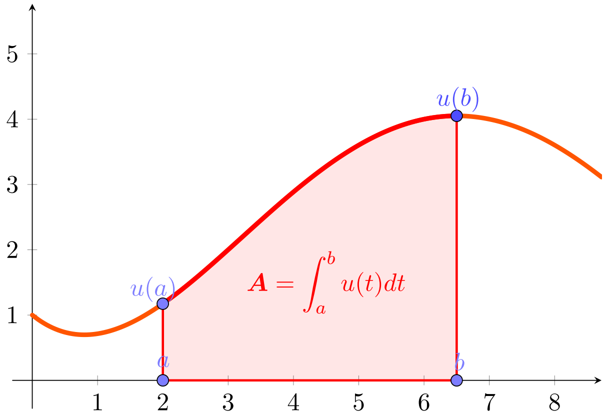
$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

- auch hier: Rechenregeln und Integrationstabellen

Probe: Differenzieren

Die Integration II

Interpretation: Fläche unter der Funktion u zwischen a und b



Integration: Ein Beispiel

Beispiel

Wir integrieren die Funktion

$$f(t) = 2\,t,$$

also

$$\int f(t)dt = \int 2\,tdt = t^2 + c$$

bzw

$$\int_0^1 2\,tdt = (t^2)\Big|_0^1 = 1$$

Wieder zurück zur Wärmeleitung!

- Joseph Fourier, 1822: ***Fouriersches Gesetz***
  - besagt dass die übertragene Wärmeleistung proportional zu Fläche, Wärmeleitfähigkeit und Temperaturdifferenz ist

$$\underbrace{\dot{Q}}_{\text{Wärmestrom}} = \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{Wärmeleit-}\\\text{koeffizient}}} \underbrace{A}_{\substack{\text{Querschnitts-}\\\text{fläche}}} \frac{\overbrace{\Delta T}^{\text{Temperaturdifferenz}}}{\underbrace{l}_{\substack{\text{Dicke der}\\\text{Schicht}}}}$$

Wieder zurück zur Wärmeleitung!

- Joseph Fourier, 1822: *Fouriersches Gesetz*
  - besagt dass die übertragene Wärmeleistung proportional zu Fläche, Wärmeleitfähigkeit und Temperaturdifferenz ist

$$\frac{\overbrace{\dot{Q}}^{\text{Wärmestrom}}}{\underbrace{A}_{\substack{\text{Querschnitts-}\\\text{fläche}}}} = \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{Wärmeleit-}\\\text{koeffizient}}} \frac{\overbrace{\Delta T}^{\text{Temperaturdifferenz}}}{\underbrace{l}_{\substack{\text{Dicke der}\\\text{Schicht}}}}$$

Wieder zurück zur Wärmeleitung!

- Joseph Fourier, 1822: *Fouriersches Gesetz*
  - besagt dass die übertragene Wärmeleistung proportional zu Fläche, Wärmeleitfähigkeit und Temperaturdifferenz ist

$$\underbrace{q}_{\text{Wärmefluss}} = - \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{Wärmeleit-}\\\text{koeffizient}}} \underbrace{T'}_{\substack{\text{Ableitung}\\\text{der Temperatur}}}$$

Ein mathematisches Modell

Startpunkt: physikalisches Gesetz, Beobachtung

Ziel: mathematische Beschreibung eines natürlichen Phänomens

- machen dazu vereinfachende Modellannahmen zB
  - gleichmäßiges Material
  - nur eine Form der Wärmeübertragung

Ein Modell für die Wärmeleitung

Wärmebilanz in Raum und Zeit

Wir betrachten einen Stab am Anfangspunkt x mit Länge Δx über die Zeitspanne Δt

$$\left|\text{Wärmemenge die in } x \text{ während } \Delta t \text{ hineinfließt}\right| + \left|\text{Wärmemenge die in } x+\Delta x \text{ während } \Delta t \text{ hinausfließt}\right| - \left|\text{Wärmeabgabe über den Mantel}\right| + \left|\text{Wärme die im Inneren erzeugt wird}\right| = \left|\text{Wärmeunterschied zwischen Anfangs- und Endzeit}\right|$$

- gibt nur Information über *gesamte* Wärmeenergie über ein *Zeitintervall*
- wollen aber Aussage über Temperatur an ***einem Ort*** zu ***einem Zeitpunkt***
  - durch mathematische Sätze können wir das erreichen
- wir erhalten eine ***Differentialgleichung***

(Differential)gleichungen I

- **bisher:** Gleichungen in Variablen, zB

$$5x^2 = 7, \quad \sin(4x) = \arctan(5), \quad \text{etc...}$$

- gesuchte Größe x ist eine Zahl
- Lösen zB durch Umformen, Lösungsformel, etc...

(Differential)gleichungen II

Differentialgleichung

- beschreibt Zusammenhang zwischen Funktion und ihren Ableitungen, zB

$$u'(x) = 10x + u(x), \qquad u''(x) - u'(x) = x$$

- gesuchte Größe u ist nun eine Funktion
- benötigen zusätzlich
  - ein Rechengebiet, zB Interval $[0, 1]$
  - Anfangs- oder Randbedingungen, zB $u(0) = 10$, $u(1) = 0$

Lösen von Differentialgleichung

Wir wissen, Integration ist Umkehrung von Ableitung

- d.h., wir "integrieren" einfach die Gleichung

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= f(t) \\
\int_0^t u'(\tau) d\tau &= \int_0^t f(\tau) d\tau \\
u(t) - u(0) &= \int_0^t f(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

- einsetzen der Anfangsbedingung

$$
u(t) = u_0 + \int_0^t f(t) dt
$$

Ein Beispiel

Beispiel

Wir wollen lösen

$$u'(t) = 5t^2, \qquad u(0) = 0$$

Lösung

1. Integrieren

$$\int_0^t 5\tau^2 d\tau = (\frac{5}{3}\tau^3)\Big|_0^t = \frac{5}{3}t^3$$

2. Einsetzen

$$u(t) = u(0) + \frac{5}{3}t^3 = \frac{5}{3}t^3$$

Noch ein Beispiel

Beispiel

Jetzt wollen wir lösen

$$u'(t) = t - u(t), \qquad u(0) = 1$$

Lösung

- Einsetzen

$$u(t) = 1 + \int_0^t (\tau - u(\tau))d\tau$$

- aber jetzt steht die gesuchte Funktion **im** Integral!

Was nun?

Lösungsmöglichkeiten:

1. Exakt mit speziellem Lösungsansatz
2. Näherungsweise $\Rightarrow$ Numerik

Numerik?

- Teilgebiet der Mathematik
- beschäftigt sich mit dem näherungsweisen Lösen von mathematischen Problemen

Ein erster Versuch

Betrachten wieder

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = 0$$

mit Lösung

$$u(t) = \int_0^t f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

Idee: wenn u eine "brave" Funktion ist, dann gilt vielleicht $u(t) \approx u(0)$, für kleine t

- also ersetzen wir $u(\tau)$ durch $u(0)$

$$u(t) \approx \int_0^t f(\tau, u(0)) d\tau$$

- Integral hängt nicht mehr von $u(t)$ ab $\to$ lösen durch Integrieren

Ein anschauliches Beispiel

Beispiel (von vorhin)

$$f(t, u(t)) = t - u(t), \qquad u(0) = 1$$

Lösung

- wählen jetzt "kleines" t, zB $t = 0.05$

$$\begin{aligned} u(0.05) &= u(0) + \int_0^{0.05} \tau - u(\tau) d\tau \\ &\approx 1 + \int_0^{0.05} \tau - 1 \, d\tau = (\frac{1}{2}\tau^2 - \tau)\Big|_0^{0.05} = 0.95125 \end{aligned}$$

- exakte Lösung wäre $u(0.05) = 0.952459$

Aber was ist $u(1)$?

Näherung ist nur genau für kleine t

Idee: betrachten nun Intervall $[0.05, 0.1]$, dann gilt wieder $u(\tau) \approx u(0.05)$

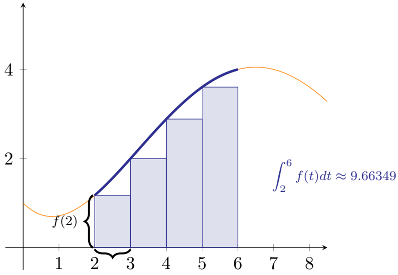
- können dies immer weiter anwenden $\rightarrow$ "große" t sind kein Problem mehr
- **aber:** müssen viele Integrale ausrechnen
  - per Hand sehr mühsam
  - vielleicht gar nicht möglich!

Numerisches Integrieren I

Idee: rechnen Integral nicht genau aus, sondern wieder nur näherungsweise

1. Unterteilen das Intervall $[a, b]$ in gleich große Teile
2. Multiplizieren für jedes Teilintervall den Funktionswert mit der Intervalllänge
3. Zusammenzählen

Numerisches Integrieren

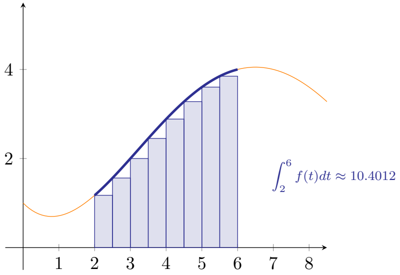


- Mathematisch:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta t f(\tau_i),$$

mit zB $\tau_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots, N$

Numerisches Integrieren

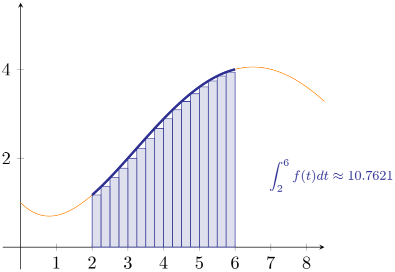


- Mathematisch:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta t f(\tau_i),$$

mit zB $\tau_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots, N$

Numerisches Integrieren

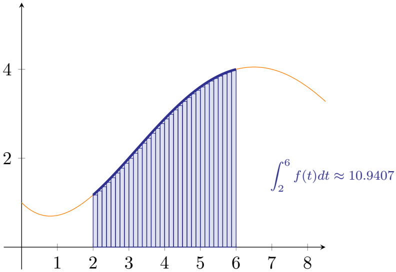


- Mathematisch:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta t f(\tau_i),$$

mit zB $\tau_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots, N$

Numerisches Integrieren

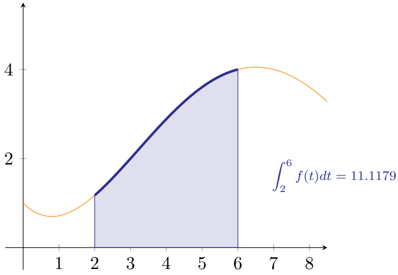


- Mathematisch:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta t f(\tau_i),$$

mit zB $\tau_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots, N$

Numerisches Integrieren



- Mathematisch:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta t f(\tau_i),$$

mit zB $\tau_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots, N$

Anwendung auf unser Beispiel

Unser t ist schon klein $\rightarrow$ können die Summe weglassen

- d.h., wir rechnen

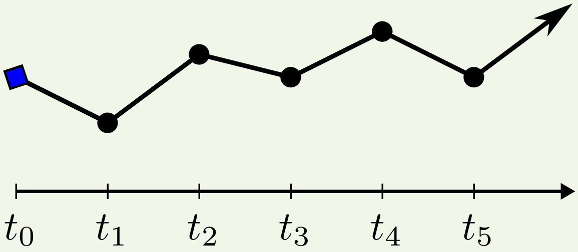
$$\int_{0.05}^{0.1} (\tau - u(\tau)) d\tau \approx (0.1 - 0.05)(0.05 - u(0.05))$$

- können also Integrale schnell ausrechnen

Zurück zur DGL!

Unser Verfahren zum Lösen der DGL lautet also

$$
\begin{aligned}
u(t_0) &= u(0) \\
u(t_1) &= u(t_0) + \Delta t \; f(t_0, u(t_0)) \\
u(t_2) &= u(t_1) + \Delta t \; f(t_1, u(t_1)) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$



Grundidee

Lösen der DGL durch Annähern des Integrals

Brauchen:

- Anfangsbedingung $u(0) = u_0$
- Zeitschrittweite Δt

Eulerverfahren

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \Delta t f(t_n, u(t_n))$$

Aufgaben II

Aufgabe 5

Das Eulerverfahren funktioniert also nicht immer.

- wir machen einen Fehler durch $u(0.2) \approx u(0)$
- der Fehler schaukelt sich auf
- **Lösungsmöglichkeiten:**
  - kleinere Schrittweite
  - bessere Verfahren, zB

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \Delta t \, f(t_{n+1}, u(t_{n+1})).$$

Motivation

Bisher: Lösen der DGL durch Annähern des Integrals

Neue Idee: Annähern des (Vorwärts-)Differenzenquotienten

Wiederholung

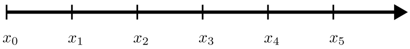
- $u'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$
- Näherung für sehr kleine h

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Vorbereitung

Benötigen:

- Unterteilung des Rechengebiets ("Gitter"), zB



  mit Abstand $h := x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots$
- setzen an jedem Gitterpunkt den DQ ein:

$$u(x_0) = u_0 \qquad \text{(AB)}$$

$$u'(x_0) \approx \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} = f(x_0)$$

$$u'(x_1) \approx \frac{u(x_2) - u(x_1)}{h} = f(x_1)$$

$$\vdots$$

Ein bekanntes Bild

Umformen auf u:

$$
\begin{aligned}
u(x_0) &= u_0 \\
u(x_1) &= u(x_0) + h\ f(x_0) \\
u(x_2) &= u(x_1) + h\ f(x_1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ haben wieder eine Näherung für u in jedem Gitterpunkt x_i

Erweiterung

Wie vorher: was ist wenn $f(x) \to f(x, u(x))$?

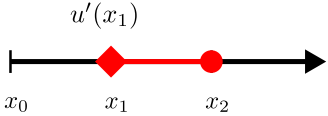
- wieder kein Problem:

$$
\begin{aligned}
u(x_0) &= u_0 \\
u(x_1) &\approx u(x_0) + h\ f(x_0, \boldsymbol{u(x_0)}) \\
u(x_2) &\approx u(x_1) + h\ f(x_1, \boldsymbol{u(x_1)}) \\
u(x_3) &\approx u(x_2) + h\ f(x_2, \boldsymbol{u(x_2)}) \\
u(x_4) &\approx u(x_3) + h\ f(x_3, \boldsymbol{u(x_3)})
\end{aligned}
$$

Andere Differenzenquotienten

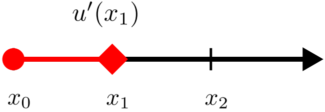
Vorwärts-Differenzenquotient

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$



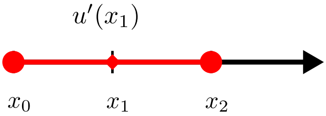
Rückwärts-Eifferenzenquotient

$$u'(x) \approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$



Zentraler Differenzenquotient

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$



DGLen höherer Ordnung

Bis jetzt: nur $u'(t) = f(t, u(t))$

Aber:

Manche Phänomene in der Natur können so nicht beschrieben werden

- zB Beschleunigung, Diffusion

$\Rightarrow$ brauchen DGLs ***höherer Ordnung***

Ordnung einer DGL

Höchste vorkommende Ableitung, zB

- $u''(x) = 0$ DGL 2ter Ordnung
- $u''''(x) = 0$ DGL 4ter Ordnung

Wie lösen wir das?

Idee: $u''(x) = (u'(x))'$

1. setzen Vorwärts-Differenzenquotienten ein

$$u''(x) \approx \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right)'$$

   - Ableitung ist ***linear***, also

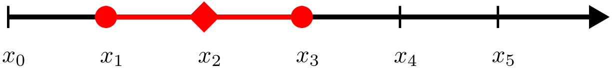
$$\left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right)' = \frac{1}{h} \left(u'(x+h) - u'(x) \right)$$

2. jetzt den Rückwärts-DQ

Der Differenzenquotient 2ter Ordnung

Für die zweite Ableitung erhalten wir also

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$



"einfachere" Schreibweise, $i = 0, 1, \ldots, n+1$

$$\boxed{x_i = i\,h, \quad u_i = u(x_i), \quad f_i = f(x_i)}$$

Zurück zur DGL!

- schreiben in jedem *inneren* Gitterpunkt x_i den DQ auf

$$
\begin{aligned}
-u''(x_1) &\approx \frac{1}{h^2}\left(-u_0 + 2u_1 - u_2\right) = f_1 \\
-u''(x_2) &\approx \frac{1}{h^2}\left(-u_1 + 2u_2 - u_3\right) = f_2 \\
&\vdots \\
-u''(x_n) &\approx \frac{1}{h^2}\left(-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1}\right) = f_n
\end{aligned}
$$

- u_0 bzw u_{n+1} kennen wir durch die RB $\rightarrow$ zB $u_0 = u_{n+1} = 1$

So viele Unbekannte!

Wir haben nun n Gleichungen

$$\frac{1}{h^2}\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\,u_0 & + & 2\,u_1 & - & u_2 & = & f_1 \\ -u_1 & + & 2\,u_2 & - & u_3 & = & f_2 \\ \vdots & & & & & & \\ -u_{n-2} & + & 2\,u_{n-1} & - & u_n & = & f_{n-1} \\ -u_{n-1} & + & 2\,u_n & - & u_{n+1} & = & f_n \end{array}\right.$$

- wir kennen u_0 und u_{n+1}

So viele Unbekannte!

Wir haben nun n Gleichungen

$$\frac{1}{h^2}\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & + & 2\,u_1 & - & u_2 & = & f_1 + \frac{u_0}{h^2} \\ -u_1 & + & 2\,u_2 & - & u_3 & = & f_2 \\ \vdots & & & & & & \\ -u_{n-2} & + & 2\,u_{n-1} & - & u_n & = & f_{n-1} \\ -u_{n-1} & + & 2\,u_n & - & & = & f_n + \frac{u_{n+1}}{h^2} \end{array}\right.$$

- wir kennen u_0 und u_{n+1} $\rightarrow$ auf rechte Seite bringen
- gesucht sind also $u_1, \ldots, u_n$

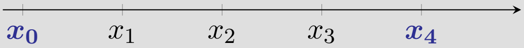
Ein Beispiel I

Beispiel

Wir lösen die DGL

$$-u''(x) = 1, \qquad u(0) = u(1) = 1$$

Rechengebiet $(0,1)$, $n = 3 \Rightarrow h = 0.25$



Ein Beispiel II

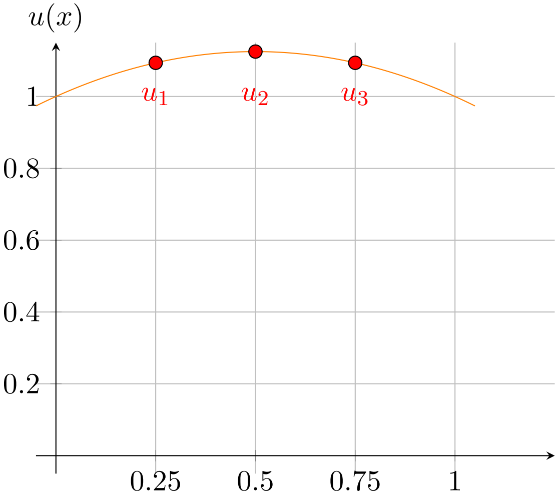
Lösung

1. stellen Gleichungssystem auf + **RB**

$$\frac{1}{h^2}\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,u_1 & - & u_2 & & & = & 1+\boldsymbol{\frac{1}{h^2}} \\ -u_1 & + & 2\,u_2 & - & u_3 & = & 1 \\ & - & u_2 & + & 2\,u_3 & = & 1+\boldsymbol{\frac{1}{h^2}} \end{array}\right.$$

2. Lösen durch Elimination: $u_1 = u_3 = \frac{35}{32},\; u_2 = \frac{9}{8}$
3. vergleichen mit exakter Lösung $u(x) = \frac{1}{2}(x - x^2)$

Ein Beispiel III



So weit, so gut

Wir müssen also statt einer DGL “nur” ein Gleichungssystem in den reellen Zahlen lösen.

Aber:

- wollen möglichst genaue Lösung

$\rightarrow$ brauchen viele Gitterpunkte

- Lösung per Hand sehr aufwendig oder unmöglich
  - kann das nicht wieder ein Computer machen?

Lösen von Gleichungssystemen I

Wir schreiben unsere Gleichungen geordnet hin:

$$
\frac{1}{h^2}\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
2\,u_1 & - & u_2 & & & & & & & = & f_1 + \dfrac{u_0}{h^2} \\
-u_1 & + & 2\,u_2 & - & u_3 & & & & & = & f_2 \\
 & \vdots & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & -u_{n-2} & + & 2\,u_{n-1} \quad - \quad u_n & = & f_{n-1} \\
 & & & & & & & - & u_{n-1} \quad + \quad 2\,u_n & = & f_n + \dfrac{u_{n+1}}{h^2}
\end{array}
\right.
$$

Lösen von Gleichungssystemen II

Wir erkennen eine gewisse Struktur:

1. pro Gleichung maximal 3 Unbekannte
2. #Gleichungen = #Unbekannte

- wir schreiben die Koeffizienten in ein quadratisches Schema, eine ***Matrix***

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kurzer Einschub I

Matrizen und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ein paar Fakten

- es gelten ähnliche Rechenregeln wie mit reellen Zahlen
  - Addition, Subtraktion sind pro Eintrag
  - Multiplikation $\cdot$ erfolgt immer Zeile $*$ Spalte

$$A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_{1\,1} + b_2 a_{1\,2} + b_3 a_{1\,3} \\ b_1 a_{2\,1} + b_2 a_{2\,2} + b_3 a_{2\,3} \\ b_1 a_{3\,1} + b_2 a_{3\,2} + b_3 a_{3\,3} \end{pmatrix}$$

  - **Division:** nicht immer definiert!
- Vektoren sind spezielle Matrizen

"Dividieren" von Matrizen: Die Inverse Matrix

- "Inverse" b einer Zahl a: $b\,a = 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{1}{a}$
- selbe Idee bei Matrizen:
  Inverse Matrix B zu A : $B\,A = I \;\Rightarrow\; B = A^{-1}$
- I ist die Einheitsmatrix, zB

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zurück zu unserem Gleichungssystem

Schreiben jetzt das Gleichungssystem als Matrix-Vektor:

$$\underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix } K} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}}_{\text{Vektor } \vec{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 + \frac{u_0}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n + \frac{u_0}{h^2} \end{pmatrix}}_{\text{Vektor} \vec{f}}$$

Also kompakt geschrieben

$$K \cdot \vec{u} = \vec{f}$$

- Lösen des *linearen Gleichungssystems*
  $\Leftrightarrow$ Ausrechnen der Inversen Matrix K^{-1}, denn dann

$$\vec{u} = K^{-1} \cdot \vec{f}$$

  - **aber:** ausrechnen der Inversen sehr aufwendig (auch für Computer)
- **Numerik:** Algorithmen zum Lösen von Gleichungssystemen (zB Gaußsches Eliminationsverfahren)

Grundidee

Annähern der Ableitung durch den Differenzenquotienten

DGL 1ter Ordnung

- Vorwärts-DQ *identisch* mit dem Eulerverfahren

DGL höherer Ordnung

- müssen ein Gleichungssystem lösen

Endlich: Die Wärmeleitgleichung!

- hängt vom Ort x und der Zeit t ab
- enthält ***partielle*** Ableitungen ∂_t, ∂_x
- formal

$$\underbrace{\partial_t u(x,t)}_{\text{Wärme``transport''}} - \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{Wärmeleit-}\\ \text{koeffizient}}} \underbrace{\partial_x(\partial_x u(x,t))}_{\text{Wärmediffusion}} = \underbrace{f(x,t)}_{\text{Wärmequelle}}$$

- benötigen Anfangs- **und** Randbedingungen
  - **immer:** Anfangstemperatur
  - **Randbedingungen:** zB Temperaturquelle am Rand, Isolation

Ein paar Infos zur Wärmeleitgleichung

- Ohne Wärmequelle ist die höchste Temperatur am Anfang oder am Rand ✓
  - Energie kann nicht aus dem Nichts erzeugt werden!
- Temperaturunterschiede am Anfang sind nach unendlich kurzer Zeit stetig verbunden
- Wärmeleitgleichung beschreibt nicht nur Wärmeleitung
  - auch das Magnetfeld in einem Elektromotor kann damit simuliert werden!

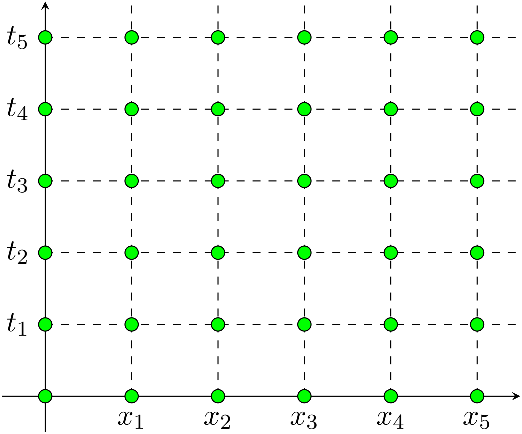
Lösung der Wärmeleitgleichung

Wieder zwei Möglichkeiten:

- Exakt lösen mittels “Grundlösung” oder “Seperationsansatz”
- Näherungsweise / Numerisch

Numerische Lösung der Wärmeleitgleichung I

DGL erster Ordnung in der Zeit, zweiter Ordnung im Ort
Idee: Finite Differenzen im Ort, Eulerverfahren in der Zeit
Brauchen: Zeit- und Ortsunterteilung



Numerische Lösung der Wärmeleitgleichung II

“einfachere” Schreibweise

$$\boxed{u_i^n = u(x_i, t_n), \quad f_i^n = f(x_i, t_n)}$$

- Eulerverfahren im Punkt x_i zum Zeitpunkt t_n

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\partial_{xx} u_i^n\right)$$

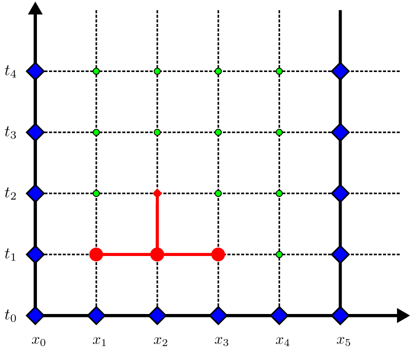
- Finite Differenzen im Punkt x_i zum Zeitpunkt t_n

$$\partial_{xx} u_i^n \approx \frac{u_{i-1}^n - 2\, u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

Numerische Lösung der Wärmeleitgleichung III

das kombinierte Verfahren lautet also:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n\right)$$



Numerische Lösung der Wärmeleitgleichung IV

Beobachtungen:

- in diesem Beispiel brauchen wir ***kein*** Gleichungssystem lösen
  - nächster Zeitschritt ist ***explizit*** gegeben!
- also ganz "einfach" zu implementieren (Excel/Calc)
- "Zuwachs" pro Zeitschritt wird mit $\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ multipliziert

Allgemein

Wenn wir zuerst die Ortsdiskretisierung durchführen erhalten wir

$$\underbrace{\vec{u}'(t)}_{\partial_t u(x,t)} = \underbrace{\vec{f}(t)}_{f(x,t)} + \underbrace{K \cdot \vec{u}(t)}_{\partial_{xx} u(x,t)}$$

Jetzt können wir nicht nur das Eulerverfahren nehmen sondern auch ein anderes.

Vor- & Nachteile der FD

- \+ Für manche Beispiele sehr einfach
- \+ Matrix ist dünnbesetzt $\Rightarrow$ wichtig für die Lösung des Gleichungssystems

- − Interessantere Rechengebiete werden sehr kompliziert, zB sternförmig
- − Lösungsverhalten hängt stark von $\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ab

In der Praxis

Zeitdiskretisierung

- Implizite Verfahren
- Verfahren höherer Ordnung
- Mehrschrittverfahren

Ortsdiskretisierung

- Finite Elemente Methode