Fibonacci Zahlen und der Goldene Schnitt

Lisa Kaltenböck

14.12.2018

Johannes Kepler Universität
A-4040 Linz, Altenbergerstraße 69

Kaninchenaufgabe

"Jemand setzte ein Kaninchenpärchen in einen gewissen Ort, der allseits mit Wänden umgrenzt war. Man wünscht zu wissen, wieviele Nachkommen dieses Paares in einem Jahr erzeugt werden. Dabei seien sie so beschaffen, dass sie in jedem Monat ein neues Paar erzeugen; und ab dem zweiten Monat nach ihrer Geburt sind auch die jungen fruchtbar."

Wie entwickelt sich die Kaninchenpopulation?

Fibonacci Zahlen

Die Zahlen $f_1, f_2, f_3, \ldots,$ die definiert sind durch

1. $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n \geq 1$ und
2. $f_1 = f_2 = 1$

heißen *Fibonacci Zahlen*.

Fibonacci Zahlen

Die Zahlen $f_1, f_2, f_3, \ldots,$ die definiert sind durch

1. $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n \geq 1$ und
2. $f_1 = f_2 = 1$

heißen *Fibonacci Zahlen*.

allgmeiner: Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ reeller Zahlen heißt *Lucas-Folge*, falls für alle $n \geq 1$ gilt

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

mathematische Spielereien

- Treppensteigen

mathematische Spielereien

- Treppensteigen
- Stammbaum einer Drohne

mathematische Spielereien

- Treppensteigen
- Stammbaum einer Drohne
- Energiezustände eines Elektrons

Induktionsbeweis

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Induktionsbeweis

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Beweis durch Vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:
   Gilt die Aussage für das kleinste n?

Induktionsbeweis

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Beweis durch Vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:
   Gilt die Aussage für das kleinste n?
2. Induktionsvoraussetzung:
   Wir nehmen an die Aussage gilt für n.

Induktionsbeweis

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Beweis durch Vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:
   Gilt die Aussage für das kleinste n?
2. Induktionsvoraussetzung:
   Wir nehmen an die Aussage gilt für n.
3. Induktionsschritt:
   Zeige, dass die Aussage dann auch für $n + 1$ gilt.

Übungen zur Induktion

- $f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n} - 1$
- $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$
- Für jede Lucas-Folge $(a_1, a_2 \dots)$ und jede natürliche Zahl $k \geq 2$ gilt

$$a_{k+1} = f_k a_2 + f_{k-1} a_1$$

Beweis durch Vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

   Gilt die Aussage für das kleinste n?

2. Induktionsvoraussetzung:

   Wir nehmen an die Aussage gilt für n.

3. Induktionsschritt:

   Zeige, dass die Aussage dann auch für $n + 1$ gilt.

Zeckendorf-Repräsentation

Jede Zahl $N \in \mathbb{N}$ kann als Summe von voneinander verschiedenen Fibonacci Zahlen dargestellt werden.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Zeckendorf-Repräsentation

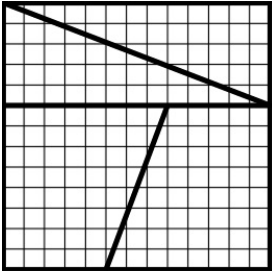
Jede Zahl $N \in \mathbb{N}$ kann als Summe von voneinander verschiedenen Fibonacci Zahlen dargestellt werden.

Diese Darstellung ist eindeutig wenn nur nicht direkt aufeinanderfolgende Fibonacci Zahlen verwendet werden:

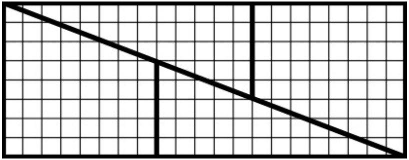
$$N = \sum_{i=1}^{k} f_{n_i} = f_{n_1} + f_{n_2} + \cdots + f_{n_k}$$

wobei $n_{i+1} > n_i + 1$.

geometrischer Trugschluss



$\overset{?}{\Leftrightarrow}$



geometrischer Trugschluss

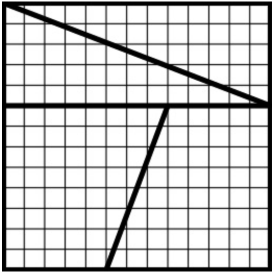
Simpson-Identität: Für alle $n \geq 2$ gilt

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

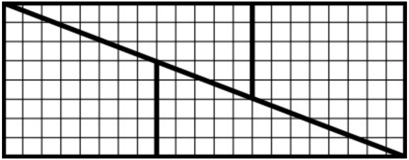
geometrischer Trugschluss

Simpson-Identität: Für alle $n \geq 2$ gilt

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$



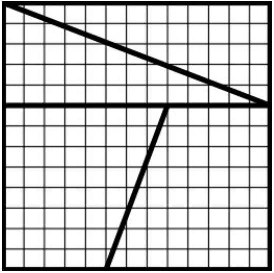
$\overset{?}{\Leftrightarrow}$



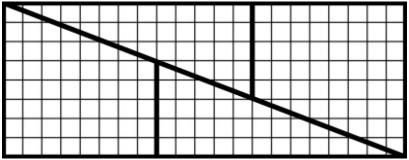
geometrischer Trugschluss

Simpson-Identität: Für alle $n \geq 2$ gilt

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$



$$\overset{?}{\Leftrightarrow}$$



Steigungen der Geraden sind $\frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}, \frac{f_{n-3}}{f_{n-1}}, \frac{f_{n-2}}{f_n}$.

geometrischer Trugschluss

Simpson-Identität: Für alle $n \geq 2$ gilt

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

Steigungen der Geraden sind $\frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}, \frac{f_{n-3}}{f_{n-1}}, \frac{f_{n-2}}{f_n}$.

Diese Werte sind sehr ähnlich, denn:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow{n \to \infty} \Phi.$$

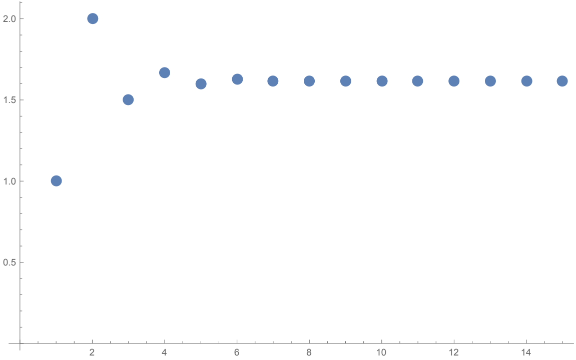
Φ heißt *Goldener Schnitt*.

goldener Schnitt

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow{n\to\infty} \Phi.$$

goldener Schnitt

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow{n\to\infty} \Phi.$$



goldener Schnitt

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi.$$

Φ ist Lösung der Gleichung $\Phi^2 = \Phi + 1$, dh

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803...$$

goldener Schnitt

Betrachte eine Strecke, die in zwei Teile geteilt ist. Die Teilung erfolgt im goldenen Schnitt, wenn das Streckenverhältnis von der Gesamtstrecke zur längeren Teilstrecke gleich ist, wie das Verhältnis von der längeren Teilstrecke zur kürzeren.

Es gilt: $\frac{a}{b} = \Phi$.

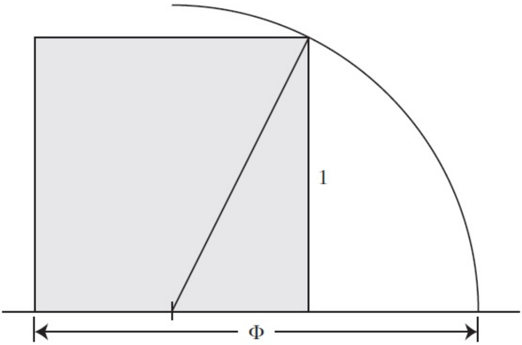
goldener Schnitt

"Eine gegebene Linie zerfalle in zwei Abschnitte. Das Quadrat des größeren Abschnitts ist gleich dem Produkt aus der ganzen Länge und dem kleineren Abschnitt."

Übersetze die Aussage in mathematische Formelschreibweise und mache eine Skizze zur Erläuterung. In welchem Streckenverhältnis stehen die beiden Abschnitte der Linie?

goldener Schnitt

Begründe, warum die Länge der angedeuteten Strecke Φ ist.



Kettenbrüche

Kettenbrüche sind Ausdrücke der Form

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

wobei $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}$. Schreibe $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Kettenbrüche

Kettenbrüche sind Ausdrücke der Form

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

wobei $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$. Schreibe $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.

- Jeder <u>endliche</u> Kettenbruch repräsentiert eine <u>rationale</u> Zahl
- Jede <u>rationale</u> Zahl kann genau auf zwei Arten als <u>endlicher</u> Kettenbruch dargestellt werden:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

Kettenbrüche

Kettenbrüche sind Ausdrücke der Form

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

wobei $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$. Schreibe $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.

- Jeder <u>unendliche</u> Kettenbruch repräsentiert eine <u>irrationale</u> Zahl
- Jede <u>irrationale</u> Zahl kann genau auf eine Art als <u>unendlicher</u> Kettenbruch dargestellt werden.

Kettenbrüche

Kettenbrüche sind Ausdrücke der Form

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

wobei $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$. Schreibe $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.

- Bricht man einen unendlichen Kettenbruch nach n Stellen ab, erhält man eine gute rationale Approximation der gegebenen Zahl:
  Sei $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ und $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Dann gilt für jeden anderen Bruch $\frac{p}{q}$ mit $q \leq q_n$ und $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ dass

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \left| \frac{p}{q} - x \right|$$

Kettenbrüche

Beispiel:

$$\begin{aligned}\pi &= [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots] \\ &= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}\end{aligned}$$

Kettenbrüche

- Kettenbruchentwicklung von Φ?
- An welcher Stelle soll man den Kettenbruch abbrechen, um eine möglichst gute Näherung zu erhalten?
- Wie sieht diese Näherung aus?

Kettenbrüche

- Kettenbruchentwicklung von Φ?
  $\Phi = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$
- An welcher Stelle soll man den Kettenbruch abbrechen, um eine möglichst gute Näherung zu erhalten?
- Wie sieht diese Näherung aus?

Kettenbrüche

- Kettenbruchentwicklung von Φ?
  $\Phi = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$
- An welcher Stelle soll man den Kettenbruch abbrechen, um eine möglichst gute Näherung zu erhalten?
- Wie sieht diese Näherung aus?
  $[1; 1, 1, 1] = \frac{5}{3}, [1; 1, 1, 1, 1] = \frac{8}{5}, [1; 1, 1, 1, 1, 1] = \frac{13}{8}, \dots$

"Linearisierung"

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

"Linearisierung"

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 2$$

"Linearisierung"

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 2$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 3$$

"Linearisierung"

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 2$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 3$$
$$\Phi^5 = 5\Phi + 5$$

"Linearisierung"

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \Phi + 1 \\
\Phi^3 &= 2\Phi + 2 \\
\Phi^4 &= 3\Phi + 3 \\
\Phi^5 &= 5\Phi + 5 \\
&\vdots \\
\Phi^n &= f_n\Phi + f_{n-1}
\end{aligned}$$

"Linearisierung"

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 2$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 3$$
$$\Phi^5 = 5\Phi + 5$$
$$\vdots$$
$$\Phi^n = f_n\Phi + f_{n-1}$$

Daraus folgt $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, dh (Φ^n) ist Lucas-Folge!

Formel von Moivre/Binet

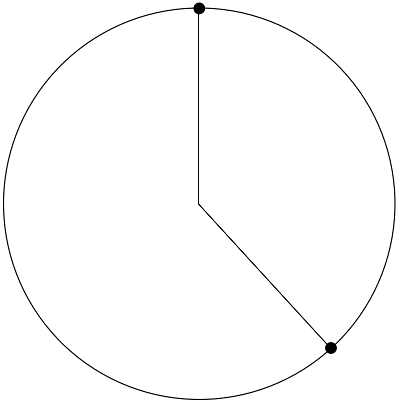
Mit

$$\Phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

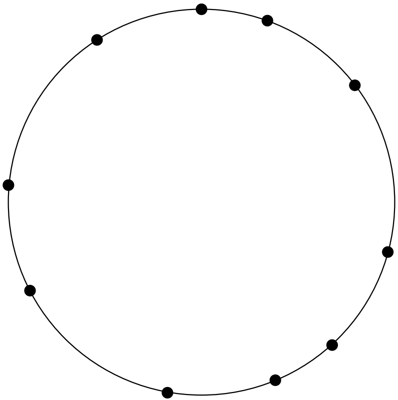
folgt eine explizite Formel für f_n:

$$f_n = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

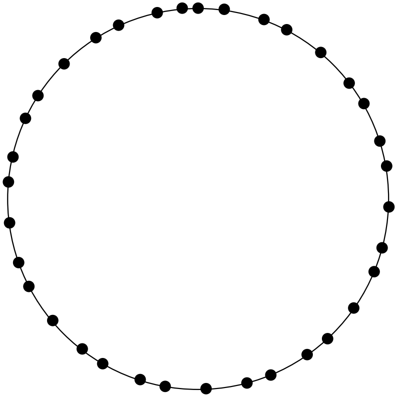
goldener Schnitt in der Natur



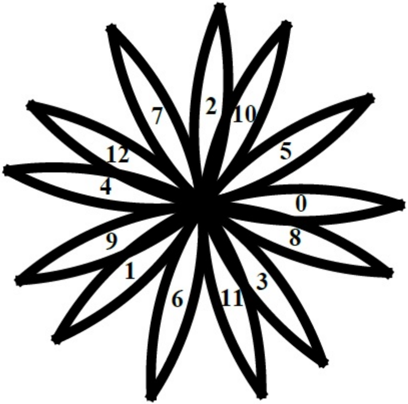
goldener Schnitt in der Natur



goldener Schnitt in der Natur



Phyllotaxis



Sonnenblumen

goldener Schnitt in der Natur

weitere Beispiele:

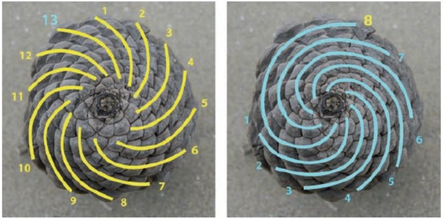
- Ananas

- Tannenzapfen
- ...

goldener Schnitt in der Natur

weitere Beispiele:

- Ananas
- Tannenzapfen



- . . .

Spiel von Wythoff

Vor zwei Spielern liegen zwei Haufen von jeweils beliebig vielen Spielsteinen. Die Spieler nehmen abwechselnd Steine weg, und zwar

- entweder von einem Haufen beliebig viele
- oder von beiden Haufen gleich viele

Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Stein wegnimmt.

Spiel von Wythoff

Schlüsselkombinationen:

- $a_0 = 0, b_0 = 0$
- a_i ist die kleinste natürliche Zahl, die unter den Zahlen $a_0, \ldots, a_{i-1}, b_0, \ldots, b_{i-1}$ nicht vorkommt
- $b_i = a_i + i$

Spiel von Wythoff

Schlüsselkombinationen:

- $a_0 = 0, b_0 = 0$
- a_i ist die kleinste natürliche Zahl, die unter den Zahlen $a_0, \ldots, a_{i-1}, b_0, \ldots, b_{i-1}$ nicht vorkommt
- $b_i = a_i + i$

$(0,0), (1,2), (3,5), (4,7), (6,10), (8,13), (9,15), \ldots$

Spiel von Wythoff

- Hinterlässt Spieler A seinem Gegenüber B eine Schlüssenkombination, so muss B in seinem darauffolgenden Zug zwangsläufig eine Kombination herstellen, die keine Schlüsselkombination ist.
- Findet A eine Kombination vor, die keine Schlüsselkombination ist, so kann er in seinem darauffolgenden Zug eine Schlüsselkombination herstellen

Dh wer als erster so eine sichere Kombination erreicht, hat gewonnen!

Spiel von Wythoff

Die sichere Kombination (a_i, b_i) lässt sich explizit berechnen:

$$a_i = \lfloor i\Phi \rfloor$$

$$b_i = \lfloor i\Phi^2 \rfloor$$

- Überprüfe die Formel und zeige durch Ausprobieren, dass die Kombinationen $(3, 5)$ und $(4, 7)$ Schlüsselkombinationen sind!