Computertomographie mathematisch erklärt

Markus Pöttinger

Institut für Industriemathematik, JKU Linz

Matheseminar, 09. Februar 2018

Wie alles begann...

Der Entwickler der mathematischen Grundlage

Johann Radon
Quelle: www.oeaw.ac.at

- $*1887 - \dagger 1956$
- österreichischer Mathematiker
- entwickelte 1917 mathematische Grundlage des CT
- Radon Transformation
- zunächst keine Anwendung dafür

Die Radon-Transformation

"Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten"

- Eine zweidimensionale skalare Funktion $f(x, y)$ wird durch die Bildung ihrer Integralwerte entlang aller möglichen linearen Integrationswege über ihr Definitionsgebiet bestimmt!
- Gerade $\gamma(t, \theta)$, Normalvektor $(\cos\theta, \sin\theta)^\top$, Abstand t vom Ursprung

$$Rf(t, \theta) = \int_{\gamma(t,\theta)} f(x, y)\, ds$$

- Werte der RT: Linienintegrale von f längs aller möglichen Geraden

Der Entwickler der mathematischen Methode

Allan McLeod Cormack
Quelle: www.nobelprize.org

- $*1924 - \dagger 1998$
- amerikanischer Physiker
- forschte an Absorption von Röntgenstrahlung durch menschliches Gewebe
- leistete physikalische Vorarbeit
- fand Anwendung der Radon Transformation (unabhängig von Radon)
- entwickelte mathematische Methode der CT
- konnte Idee noch nicht umsetzten
- 1979: Nobelpreis für Medizin

Der Entwickler des Computertomographen

Godfrey Newbold Hounsfield
Quelle: www.nobelprize.org

- $*1919 - \dagger 2004$
- britischer Elektrotechniker
- entwickelte 1969 Prototyp des CT
- entwickelte Algorithmen (auf Basis der Vorarbeit von Cormack)
- 1979: Nobelpreis für Medizin

Aller Anfang ist schwer!

- 1968: Untersuchung eines Schweinegehirns
  - Abtastphase des ersten CT Gerätes: neun Tage!
  - 28000 Messungen
  - Rechendauer des Computers: 2 Stunden!
- 1971: erste Mensch per CT untersucht

Was ist ein Computertomograph?

Der Computertomograph

Quelle: www.philips.at

Der Computertomograph

- CT:
  - Verfahren basierend auf Röntgenstrahlung
  - Schnittbildern eines Objektes berechnet aus Röntgenprojektionen, die von verschiedenen Seiten aufgenommen werden
  - Röntgenquelle und Detektor rotieren um Objekt
  - Schnittbilder werden am Computer errechnet
  - Berechnung von CT-Bildern basiert auf Radon-Transformation
  - überlagerungsfreie Schichtaufnahmen
  - Querschnitte des Körpers selektiv darstellbar
  - Schnittbilder zusammengefasst ergeben 3D Bild
- Röntgenstrahlung - Warum?
  - großes Durchdringvermögen
  - materialspezifische Abschwächung

Bildrekonstruktion

- Bild wird aus Gewebeverteilung rekonstruiert
- Gewebeverteilung wird auf Basis der Radon-Transformation bestimmt:

$$Rf(t,\theta) = \int_{\gamma(t,\theta)} f(x,y)\, ds$$

  - f ...... Dichtefunktion des Materials/Gewebes
  - Rf ... Schwächung des Röntgenstrahls längs $\gamma(t,\theta)$
- Invertierung (Rücktransformation) der Radon-Transformation
- inverses (schlecht-gestelltes) Problem:

Messungen abgeschwächerte Röntgenstrahl (Wirkung)

$$\downarrow$$

örtlicher Verlauf der Absorption (Ursache)

Problem der CT

Anwendung der CT:

- CT in der Humanmedizin
- CT in der Materialwissenschaft (zerstörungsfreie Materialprüfung)

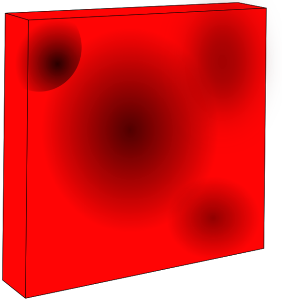
Problem der Tomographie kommt auch in der Astrophysik vor!!

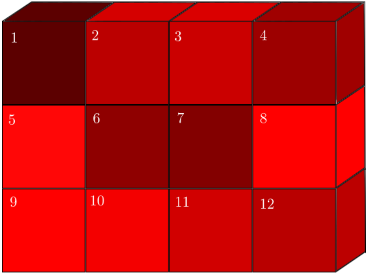
Modellbeispiel

Basierend auf Prinzipien des CT-Gerätes der ersten Generation

Modellierung

- zerlegen Gewebeblock in einzelne Schichten
- zerlegen Gewebeschicht in gleichmäßige würfelförmige Zellen (Voxel)
- innerhalb Zelle homogenes Gewebe
- Nummerierung der Zellen



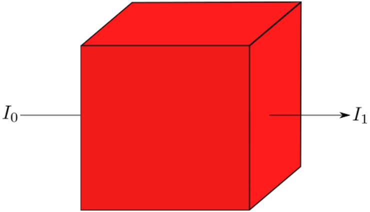


Durchgang eines Röntgenstrahls durch eine Zelle

Definition

- I_0... Intensität des einfallenden Röntgenstrahls (bekannt)
- I_1... Intensität des austretenden Röntgenstrahls (gemessen)

- Röntgenstrahl wird bei Durchgang durch Zelle abgeschwächt
- Intensität wird um bestimmten Faktor λ reduziert



$$I_1 = \lambda I_0$$

Durchgang eines Röntgenstrahls durch eine Zelle

- Faktor λ hängt ab von...
  - Beschaffenheit des Zellen-Gewebes
  - Länge des Strahlenstücks das Zelle durchdringt

Definition

- d... Länge des Strahlenstücks das Zelle durchdringt
- μ... Absorptionskoeffizient des Gewebes in Zelle

- exponentielle Abnahme der Intensität:

$$I_1 = \underbrace{e^{-\mu d}}_{=\lambda} I_0$$

Modellvereinfachung

Definition

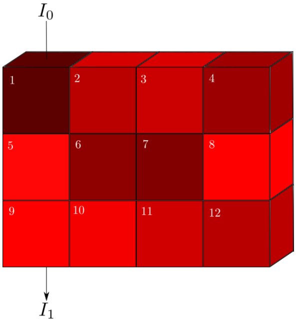
- μ_i... Absorptionskoeffizient des Gewebes der i-ten Zelle
- a..... Kantenlänge der Zelle

- Abschwächungsfaktor eins Röntgenstrahl durch i-te Zelle:

$$\lambda_i = e^{-\mu_i a}$$

Durchgang eines Röntgenstrahls durch mehrere Zellen

- pro Zelle wird Röntgenstrahl um entsprechenden Faktor abgeschwächt
- Beispiel: Röntgenstrahl verläuft durch Zellen $1, 5, 9$



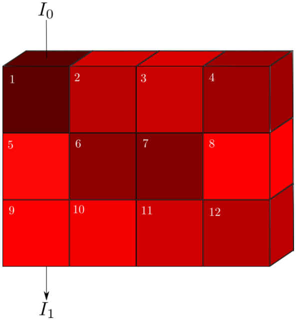
$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_9 \lambda_5 \lambda_1 I_0 \\ &= e^{-\mu_9 a} e^{-\mu_5 a} e^{-\mu_1 a} I_0 \\ &= e^{-(\mu_9+\mu_5+\mu_1)a} I_0 \end{aligned}$$

- Abschwächungsfaktor:

$$e^{-(\mu_9+\mu_5+\mu_1)a} = \frac{I_1}{I_0}$$

Durchgang eines Röntgenstrahls durch mehrere Zellen

- pro Zelle wird Röntgenstrahl um entsprechenden Faktor abgeschwächt
- Beispiel: Röntgenstrahl verläuft durch Zellen $1, 5, 9$



$$
\begin{aligned}
I_1 &= \lambda_9 \lambda_5 \lambda_1 I_0 \\
&= e^{-\mu_9 a} e^{-\mu_5 a} e^{-\mu_1 a} I_0 \\
&= e^{-(\mu_9 + \mu_5 + \mu_1) a} I_0
\end{aligned}
$$

- Summe der Absorptionskoeffizienten: (Tomographieformel)

$$
\mu_9 + \mu_5 + \mu_1 = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{I_1}{I_0} \right)
$$

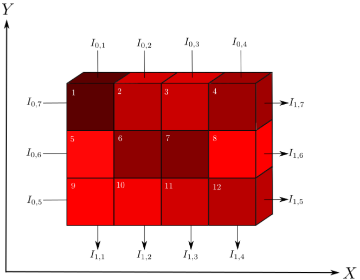
Röntgenstrahlen durch Gewebeschicht

- nur Summen von Absorptionskoeffizienten stehen zur Verfügung
- betrachten Objekt von allen Seiten
- Gewebeschicht wird durch zahlreiche Röntgenstrahlen vermessen
- alle Strahlen fallen parallel zur Gewebeschicht ein
  - parallel zu Koordinatenachsen
  - unter beliebigen Winkel (Röntgenquelle umkreist Patient)
- Zelle wird mehrfach durchleuchtet
- nummerieren Röntgenstrahlen

Röntgenstrahlen durch Gewebeschicht

Definition

- $I_{0,j}$... Intensität des einfallenden j-ten Röntgenstrahls
- $I_{1,j}$... Intensität des austretenden j-ten Röntgenstrahls



Strahl durch Zellen 1,5,9: $\mu_9 + \mu_5 + \mu_1 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,1}}{I_{0,1}}\right)$

Strahl durch Zellen 2,6,10: $\mu_{10} + \mu_6 + \mu_2 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,2}}{I_{0,2}}\right)$

Strahl durch Zellen 3,7,11: $\mu_{11} + \mu_7 + \mu_3 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,3}}{I_{0,3}}\right)$

Strahl durch Zellen 4,8,12: $\mu_{12} + \mu_8 + \mu_4 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,4}}{I_{0,4}}\right)$

Strahl durch Zellen 9,10,11,12: $\mu_{12} + \mu_{11} + \mu_{10} + \mu_9 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,5}}{I_{0,5}}\right)$

Strahl durch Zellen 5,6,7,8: $\mu_8 + \mu_7 + \mu_6 + \mu_5 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,6}}{I_{0,6}}\right)$

Strahl durch Zellen 1,2,3,4: $\mu_4 + \mu_3 + \mu_2 + \mu_1 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,7}}{I_{0,7}}\right)$

Problem???

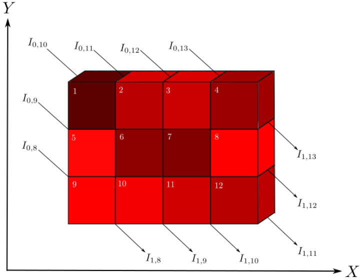
Anzahl der benötigten Röntgenstrahlen

- $\#$ Röntgenstrahlen $= \#$ Gleichungen $\geq \#$ Variablen (μ_i's)
- $\#$ Röntgenstrahlen parallel zu Koordinatenachsen nicht ausreichend
- müssen auch schrägliegende Röntgenstrahlen betrachten

Definition

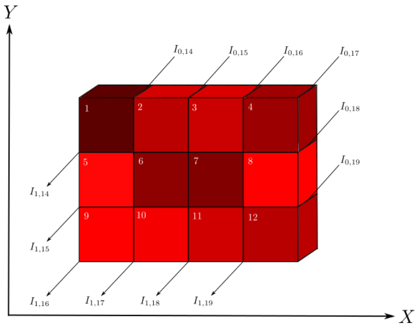
- d... Länge der Diagonale durch Zelle ($d = a\sqrt{2}$)

Röntgenstrahlen 'schräg' liegend



Strahl durch Zelle 9:	$\mu_9 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,8}}{I_{0,8}}\right)$
Strahl durch Zellen 5,10:	$\mu_{10} + \mu_5 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,9}}{I_{0,9}}\right)$
Strahl durch Zellen 1,6,11:	$\mu_{11} + \mu_6 + \mu_1 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,10}}{I_{0,10}}\right)$
Strahl durch Zellen 2,7,12:	$\mu_{12} + \mu_7 + \mu_2 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,11}}{I_{0,11}}\right)$
Strahl durch Zellen 3,8:	$\mu_8 + \mu_3 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,12}}{I_{0,12}}\right)$
Strahl durch Zellen 4:	$\mu_4 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,13}}{I_{0,13}}\right)$

Röntgenstrahlen 'schräg' liegend



Strahl durch Zelle 1: $$\mu_1 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,14}}{I_{0,14}}\right)$$

Strahl durch Zellen 2,5: $$\mu_5 + \mu_2 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,15}}{I_{0,15}}\right)$$

Strahl durch Zellen 3,6,9: $$\mu_9 + \mu_6 + \mu_3 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,16}}{I_{0,16}}\right)$$

Strahl durch Zellen 4,7,10: $$\mu_{10} + \mu_7 + \mu_4 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,17}}{I_{0,17}}\right)$$

Strahl durch Zellen 8,11: $$\mu_{11} + \mu_8 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,18}}{I_{0,18}}\right)$$

Strahl durch Zellen 12: $$\mu_{12} = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,19}}{I_{0,19}}\right)$$

Anzahl benötigter Röntgenstrahlen

- genaue Anzahl benötigter Röntgenstrahlen nicht so wichtig
- Messungen beinhalten Störungen/Ungenauigkeiten
- $I_{1,j}$ nicht exakt bekannt
- nehmen daher soviele Informationen wie wir bekommen können

Das resultierende lineare Gleichungssystem

$$\mu_{12} + \mu_{11} + \mu_{10} + \mu_9 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,5}}{I_{0,5}}\right) \qquad \mu_{10} + \mu_7 + \mu_4 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,17}}{I_{0,17}}\right)$$

$$\mu_8 + \mu_7 + \mu_6 + \mu_5) = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,6}}{I_{0,6}}\right) \qquad \mu_5 + \mu_2 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,15}}{I_{0,15}}\right)$$

$$\mu_4 + \mu_3 + \mu_2 + \mu_1 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,7}}{I_{0,7}}\right) \qquad \mu_{10} + \mu_5 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,9}}{I_{0,9}}\right)$$

$$\mu_9 + \mu_5 + \mu_1 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,1}}{I_{0,1}}\right) \qquad \mu_8 + \mu_3 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,12}}{I_{0,12}}\right)$$

$$\mu_{10} + \mu_6 + \mu_2 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,2}}{I_{0,2}}\right) \qquad \mu_{11} + \mu_8 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,18}}{I_{0,18}}\right)$$

$$\mu_{11} + \mu_7 + \mu_3 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,3}}{I_{0,3}}\right) \qquad \mu_9 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,8}}{I_{0,8}}\right)$$

$$\mu_{12} + \mu_8 + \mu_4 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{I_{1,4}}{I_{0,4}}\right) \qquad \mu_4 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,13}}{I_{0,13}}\right)$$

$$\mu_{11} + \mu_6 + \mu_1 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,10}}{I_{0,10}}\right) \qquad \mu_1 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,14}}{I_{0,14}}\right)$$

$$\mu_{12} + \mu_7 + \mu_2 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,11}}{I_{0,11}}\right) \qquad \mu_{12} = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,19}}{I_{0,19}}\right)$$

$$\mu_9 + \mu_6 + \mu_3 = -\frac{1}{d} \ln\left(\frac{I_{1,16}}{I_{0,16}}\right)$$

Einführung Matrizen

Darstellung eines linearen Gleichungssystems mittels Matrix und Vektoren

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Definition

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \; x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

Definition

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

Definition

$$A^\top := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Transponierte und Inverse

$$AA^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} & a_{31}^2 + a_{32}^2 \end{pmatrix}$$

$$A^\top A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} & a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 \end{pmatrix}$$

Definition

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse $A^{-1} : A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Matrizen

BEISPIEL:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme x: $\quad Ax = b \;\Leftrightarrow\; x = A^{-1}b$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$$

BEISPIEL:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme x: $\quad Ax = b \;\Leftrightarrow\; x = A^{-1}b$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Zurück zu unserem Modellbeispiel

lineares Gleichungssystem unseres Modellbeispiels

$$\mu_{12} + \mu_{11} + \mu_{10} + \mu_9 = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,5}}{I_{0,5}}\right)$$
$$\mu_8 + \mu_7 + \mu_6 + \mu_5) = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,6}}{I_{0,6}}\right)$$
$$\mu_4 + \mu_3 + \mu_2 + \mu_1 = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,7}}{I_{0,7}}\right)$$
$$\mu_9 + \mu_5 + \mu_1 = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,1}}{I_{0,1}}\right)$$
$$\mu_{10} + \mu_6 + \mu_2 = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,2}}{I_{0,2}}\right)$$
$$\mu_{11} + \mu_7 + \mu_3 = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,3}}{I_{0,3}}\right)$$
$$\mu_{12} + \mu_8 + \mu_4 = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,4}}{I_{0,4}}\right)$$
$$\mu_{11} + \mu_6 + \mu_1 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,10}}{I_{0,10}}\right)$$
$$\mu_{12} + \mu_7 + \mu_2 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,11}}{I_{0,11}}\right)$$
$$\mu_9 + \mu_6 + \mu_3 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,16}}{I_{0,16}}\right)$$

$$\mu_{10} + \mu_7 + \mu_4 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,17}}{I_{0,17}}\right)$$
$$\mu_5 + \mu_2 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,15}}{I_{0,15}}\right)$$
$$\mu_{10} + \mu_5 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,9}}{I_{0,9}}\right)$$
$$\mu_8 + \mu_3 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,12}}{I_{0,12}}\right)$$
$$\mu_{11} + \mu_8 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,18}}{I_{0,18}}\right)$$
$$\mu_9 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,8}}{I_{0,8}}\right)$$
$$\mu_4 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,13}}{I_{0,13}}\right)$$
$$\mu_1 = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,14}}{I_{0,14}}\right)$$
$$\mu_{12} = -\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,19}}{I_{0,19}}\right)$$

lineares Gleichungssystem unseres Modellbeispiels

$$
\underbrace{\begin{pmatrix}
1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}}_{=:A}
\underbrace{\begin{pmatrix}
\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\\ \mu_4\\ \mu_5\\ \mu_6\\ \mu_7\\ \mu_8\\ \mu_9\\ \mu_{10}\\ \mu_{11}\\ \mu_{12}
\end{pmatrix}}_{=:\mu}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,1}}{I_{0,1}}\right)\\
-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,2}}{I_{0,2}}\right)\\
-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,3}}{I_{0,3}}\right)\\
-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,4}}{I_{0,4}}\right)\\
-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,5}}{I_{0,5}}\right)\\
-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,6}}{I_{0,6}}\right)\\
-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{I_{1,7}}{I_{0,7}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,8}}{I_{0,8}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,9}}{I_{0,9}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,10}}{I_{0,10}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,11}}{I_{0,11}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,12}}{I_{0,12}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,13}}{I_{0,13}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,14}}{I_{0,14}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,15}}{I_{0,15}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,16}}{I_{0,16}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,17}}{I_{0,17}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,18}}{I_{0,18}}\right)\\
-\frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_{1,19}}{I_{0,19}}\right)
\end{pmatrix}}_{=:b}
$$

Modellbeispiel

ZIEL:

- Bestimme aus Gleichungssystem alle μ_i's
- alle μ_i's zusammen ergeben Gewebeverteilung der Gewebeschicht
- 2D Bild des Gewebeschnittes (Zelle $\hat{=}$ Pixel)

Modellbeispiel

- Problem: A ist (19×12)-Matrix $\rightarrow$ A nicht invertierbar
- Abhilfe: betrachte Normalgleichung

$$A^\top A\mu = A^\top b$$

- verallgemeinerte Lösung:

$$\mu = \underbrace{(A^\top A)^{-1} A^\top b}$$

- $(A^\top A)^{-1} A^\top$... verallgemeinerte Inverse von A

Modellbeispiel

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Modellbeispiel

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Modellbeispiel

$$
(A^\top A)^{-1} = \begin{pmatrix}
0.4268 & -0.0597 & -0.0294 & -0.1793 & -0.1500 & -0.0859 & 0.0959 & 0.1227 & -0.0399 & 0.1403 & -0.1628 & 0.0207 \\
-0.0597 & 0.4131 & -0.1384 & -0.0294 & -0.1169 & -0.0914 & -0.0005 & 0.1194 & 0.1403 & -0.0535 & 0.0616 & -0.1628 \\
-0.0294 & -0.1384 & 0.4131 & -0.0597 & 0.1194 & -0.0005 & -0.0914 & -0.1169 & -0.1628 & 0.0616 & -0.0535 & 0.1403 \\
-0.1793 & -0.0294 & -0.0597 & 0.4268 & 0.1227 & 0.0959 & -0.0859 & -0.1500 & 0.0207 & -0.1628 & 0.1403 & -0.0399 \\
-0.1500 & -0.1169 & 0.1194 & 0.1227 & 0.4592 & 0.0462 & -0.1356 & -0.2135 & -0.1500 & -0.1169 & 0.1194 & 0.1227 \\
-0.0859 & -0.0914 & -0.0005 & 0.0959 & 0.0462 & 0.3799 & -0.0747 & -0.1356 & -0.0859 & -0.0914 & -0.0005 & 0.0959 \\
0.0959 & -0.0005 & -0.0914 & -0.0859 & -0.1356 & -0.0747 & 0.3799 & 0.0462 & 0.0959 & -0.0005 & -0.0914 & -0.0859 \\
0.1227 & 0.1194 & -0.1169 & -0.1500 & -0.2135 & -0.1356 & 0.0462 & 0.4592 & 0.1227 & 0.1194 & -0.1169 & -0.1500 \\
-0.0399 & 0.1403 & -0.1628 & 0.0207 & -0.1500 & -0.0859 & 0.0959 & 0.1227 & 0.4268 & -0.0597 & -0.0294 & -0.1793 \\
0.1403 & -0.0535 & 0.0616 & -0.1628 & -0.1169 & -0.0914 & -0.0005 & 0.1194 & -0.0597 & 0.4131 & -0.1384 & -0.0294 \\
-0.1628 & 0.0616 & -0.0535 & 0.1403 & 0.1194 & -0.0005 & -0.0914 & -0.1169 & -0.0294 & -0.1384 & 0.4131 & -0.0597 \\
0.0207 & -0.1628 & 0.1403 & -0.0399 & 0.1227 & 0.0959 & -0.0859 & -0.1500 & -0.1793 & -0.0294 & -0.0597 & 0.4268
\end{pmatrix}
$$

Schlecht konditioniertes Problem

- $Bx = b$, B invertierbar
- Konditionszahl $\kappa(B)$:
  - $\kappa(B) := \|B\|\|B^{-1}\|$
  - gut konditioniert: $\kappa(B) \approx 1$
  - schlecht konditioniert: $\kappa(B) > 1$

Beispiel für schlecht konditioniertes Problem

- Betrachte folgendes Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- Konditionszahl: $\kappa(B) \approx 1353$
- Bestimme zu beliebigen x Lösung y:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Beispiel für schlecht konditioniertes Problem

- Berechne Inverse zu B:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix}$$

- Wende nun B^{-1} auf y an:

$$x = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel für schlecht konditioniertes Problem

- Betrachte nun gestörte Daten y^δ:

$$y^\delta = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- δ: Maß für Größe der Störung
- Wende nun B^{-1} auf y^δ an:

$$\begin{aligned} x^\delta = B^{-1} y^\delta = B^{-1} y + \delta B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 492 \\ -1860 \\ 1500 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel für schlecht konditioniertes Problem

- Bemerke: y ist normalerweise nicht bekannt!
- $\delta = \frac{1}{100}$ (Datenfehler in Größenordnung von 1%)

$$y^\delta = \begin{pmatrix} 0.5100 \\ 0.3233 \\ 0.2600 \end{pmatrix}$$

- Wende nun B^{-1} auf y^δ an:

$$x^\delta = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5010 \\ 0.3323 \\ 0.2510 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.92 \\ -18,60 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Beispiel für schlecht konditioniertes Problem

- $\delta = \frac{1}{100}$ (Datenfehler in Größenordnung von 1%)

$$x^\delta = \begin{pmatrix} 5,92 \\ -18,60 \\ 15 \end{pmatrix}$$

- Im Vergleich zu exakten Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Grundidee der Regularisierung

Ausweg - Ideen?

- modifiziere exakte Gleichung $Bx = y$:

$$(B + \alpha I)x = y$$

- z.B.: $\alpha = 0.06 \quad \rightarrow \quad \kappa(B + \alpha I) \approx 15$ (Erinnerung: $\kappa(B) \approx 1353$)

Grundidee der Regularisierung

- Berechne x^δ:

$$(B+\alpha I)^{-1}y^\delta = \begin{pmatrix} 0.7613 \\ 0.0606 \\ 0.2539 \end{pmatrix}$$

- Im Vergleich zu exakten Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Ungenauere Problem liefert genauer Lösung als exaktes Problem!!!

Ende

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!