**JKU YOUNG SCIENTISTS - 1. FEBRUAR 2019**

Es gibt verschiedene Arten von Zaubertricks. Es gibt solche, die der aufführenden Person großes Geschick, und noch viel mehr Übung abverlangen. Und es gibt solche, für die das nicht der Fall ist. Das sollte jedoch nicht zu dem Missverständnis führen zu glauben, dass ein Zaubertrick der einfach aufzuführen ist, auch einfach in dem Sinne ist, dass ihm bloß eine simple Idee zu Grunde liegt. Wir werden uns im Folgenden mit Zaubertricks beschäftigen, die auf mathematischen Beobachtungen beruhen, und wir werden sehen, dass diese keineswegs trivial sind.

## 1. De Bruijn-Folgen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Zaubertrick, zunächst mit einer kurzen Beschreibung seiner Wirkung auf den Zuseher. Ein Zauberer gibt einen Stoß von Karten an eine beliebige Person im Publikum und fordert sie auf abzuheben, den Stoß der abgehobenen Karten unter den Stoß der übrigen Karten zu legen, und die Karten an eine weitere Person weiterzureichen, die die Karten auf die selbe Art und Weise mischt und anschließend weiterreicht. Das Prozedere läuft so lange bis die Karten eine fünfte Person erreicht haben, die nun die oberste Karte abhebt, diese behält, und die restlichen Karten an die vier vorherigen Persone weiterreicht, die ebenfalls jeweils die oberste Karte abheben und behalten. Die Zauberer fragt wer von ihnen eine rote Karte hat, und sagt ihnen anschließend, und zwar allen fünf Personen, welche Karte sie jeweils haben.

Was steckt da dahinter? Ein erster Schritt zum Verständnis dessen was diesem Trick zu Grunde liegt ist die Bestimmung des Informationsgehalts der Antwort auf die Frage des Zauberers, also auf die Frage wer von den fünf Personen eine rote Karte gehoben hat. Da jeder entweder eine rote oder eine schwarze Karte hat, ist die Anzahl der möglichen Antworten darauf: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. Wenig überraschend besteht der Stoß aus 32 Karten, und diese Karten sind so angeordnet sind, dass die Antwort auf die Frage ausreicht um auf die erste der gehobenen Karten zu schließen. Da dem Zauberer die Anordnung der Karten bekannt ist, kann er daraus wiederum die weiteren 4 Karten bestimmen.

Überlegen wir uns das an einem einfacheren Beispiel: angenommen es hätten nur drei Personen jeweils eine Karte abgehoben, aus einem Stoß von $2 \times 2 \times 2 = 8$ Karten. Die möglichen dabei auftretenden Farbkombinationen sind

$$RRR \quad RRS \quad RSR \quad RSS \quad SRR \quad SRS \quad SSR \quad SSS$$

Gibt's eine Anordnung von 8 Karten, sodass jede dieser Farbkombinationen eindeutig eine Karte bestimmt? Anders formuliert: gibt's eine Folge von 8 R/S Farben, sodass die Farbkombination dreier darin aufeinanderfolgender Farben jeweils genau einmal vorkommt? Es ist nicht schwer zu sehen zu sehen, dass die Folge

$$RRRSSSRS$$

diese Eigenschaft hat.

Im Weiteren betrachten wir, den mathematischen Konventionen folgend, bloß 0/1-Folgen. Eine de Bruijn-Folge mit Fensterlänge $k$ ist eine 0/1-Folge der Länge $2^k$ mit der Eigenschaft, dass jede Teilfolge $k$ aufeinanderfolgender Ziffern genau einmal vorkommt. Wir stehen nun also vor einem mathematischen Problem: existiert für jede natürlich Zahl $k$ eine de Bruijn-Folge mit Fensterlänge $k$, und wie findet man sie? Wie viele gibt's, und gibt's welche die besonders schön sind?

Die ersten Fragen lassen sich mit Hilfe von graphentheoretischen Methoden beantworten. Einen gerichteten Graphen kann man sich als eine Menge von Punkten - Knoten genannt - vorstellen, die miteinander durch Pfeile - Kanten genannt - verbunden sind. Der Graph, der uns bei der Beantwortung unserer Frage nach der Existenz und Konstruktion von de Bruijn-Folgen mit Fensterlänge k helfen soll, ist so definiert: die Knoten des Graphen sind die $k-1$-Tupel, die sich aus den Ziffern 0 und 1 bilden lassen; und eine Kante führt von einem Knoten $x$ zu einem Knoten $y$, wenn ein $k$-Tupel existiert, aus dem man durch Entfernen des letzten bzw. ersten Elements das Tupel $x$ bzw. $y$ erhält.

Ein "Eulerscher Kreis" in einem gerichteten Graphen ist ein gerichteter Weg (i.e. den Pfeilen folgend), der in einem Knoten beginnt, in demselben Knoten endet, und jede Kante des Graphen genau einmal verwendet. Es ist nicht schwierig zu sehen, zunächst an einem Beispiel, dass die Existenz eines Eulerschen Kreises in unserem de Bruijn-Graphen der Existenz einer de Bruijn-Folge entspricht. Ebenso ist es nicht schwierig zu sehen, dass man in unserem de Bruijn-Graphen immer ein Eulerscher Weg finden kann.

Um zu unserem Kartentrick zurückzukommen, hier ist eine de Bruijn-Folge mit Fensterlänge $k = 5$:

$$00000100101100111110001101110101,$$

und hier ist eine Anordnung von 32 Karten - Ass und Zwei bis Acht, in allen vier Farben - die mit dieser de Bruijn-Folge kompatibel ist:

$$8T, AT, 2T, 4T, AP, 2K, 5T, 3P, 6K, 4P, AH, 3K, 7T, 7P, 7H, 6H,$$
$$4H, 8H, AK, 3T, 6T, 5P, 3H, 7K, 6P, 5H, 2H, 5K, 2P, 4K, 8P, 8K,$$

wobei $H$ für Herz, $K$ für Karo, $P$ für Pick und $T$ für Treff bzw. Kreuz steht.

Es gibt einen "Trick" mit dem man sich diese de Bruijn-Folge und diese Anordnung der Karten relativ einfach merken kann. Zahlen sind für gewöhnlich zur Basis 10 geschrieben (und werden daher Dezimalzahlen genannt), beispielsweise entspricht der Ausdruck 11 der Zahl $1 \times 10 + 1$ und der Ausdruck 274 der Zahl $2 \times 100 + 7 \times 10 + 4 \times 1$. Bei Binärzahlen übernimmt die Zahl 2 die Rolle der Zahl 10. Als Binärzahl entspricht z.B. der Ausdruck 111 der (Dezimal-)Zahl $1 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1$ und der Ausdruck 000 der (Dezimal-)Zahl $0 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 0$. Ähnlich sieht man

001 entspricht 1,
010 entspricht 2,
011 entspricht 3,
100 entspricht 4,
101 entspricht 5,
110 entspricht 6.

In obiger de Bruijn-Folge kodiert ein Wort *abcde* aus den Ziffern 0 und 1 eine Karte wie folgt: die ersten beiden Buchstaben *ab* kodieren die Farbe der Karte nach der Regel

| | |
|---|---|
| 00 | Treff |
| 01 | Pick |
| 10 | Karo |
| 11 | Herz, |

während die letzten drei Buchstaben *cde* den Wert der Karte kodieren, indem man sie als die Binärzahl-Darstellungen von 0 bis 7 auffasst, die für die Karten(-werte) Acht, Ass, Zwei,..., Sieben stehen.
Um sich die de Bruijn-Folge zu merken erklären wir kurz wie sie erzeugt worden ist. Dazu muss man zunächst wissen was Addition modulo Zwei bedeutet: das Ergebnis der Addition $a + b$ zweier ganzer Zahlen $a$ und $b$ ist 0, falls $a + b$ gerade ist, und 1 falls $a + b$ ungerade ist. Es gilt daher

$$0 + 0 = 0,$$
$$1 + 1 = 0,$$
$$0 + 1 = 1,$$
$$1 + 0 = 1.$$

Die Folge beginnt nun mit 000001. Bezeichnen *abcde* die letzten 5 Ziffern der Folge, so erhält man die nächste Ziffer indem man $a + c$ modulo Zwei dranhängt.

## 2. Gilbreath Permutationen

Wir beginnen wieder mit einem Trick, und seiner Beschreibung aus der Sicht der Zuseher. Der Zauberer testet eine Person aus dem Publikum wie gut sie darin ist Lügen zu erkennen bzw. selbst zu lügen. Von einem Stoß Karten wird eine unbestimmte Zahl von Karten auf einen neuen Stoß ausgegeben, die beiden Stöße werden "zusammengeblättert", und anschließend die obersten zwanzig Karten alternierend auf zwei Stöße aufgeteilt. Der Zauberer nimmt einen davon und ruft nach und nach die Farben seiner Karten aus, also rot oder schwarz, während die Aufgabe des Zusehers ist jeweils herauszufinden ob der Zauberer dabei gelogen bzw. die Wahrheit gesagt hat. Nach jedem Raten zeigt der Zauberer seine Karte und notiert ob richtig oder falsch geraten worden ist.

Anschließend werden die Rollen zwischen den beiden getauscht: die Person aus dem Publikum nimmt ihren Stoß von Karten, ruft nach und nach die Farbe der obersten Karten aus ... und lässt den Zauberer raten, der... anschließend die Farben aller Karten richtig errät.

Was steckt da dahinter?

Wir erklären im Folgenden Gilbreath-Permutationen: gegeben sei ein Stoß von $N$ Karten, die fortlaufend von 1 bis $N$ nummeriert sind. Die Nummer beschreibt die (Anfangs-)Position der Karte, wobei 1 die Nummer der obersten Karte ist und $N$, die der untersten. Bei dem Mischvorgang, der im Englischen Gilbreath-Shuffle genannt wird, und den wir im Folgenden analysieren möchten, werden die obersten $j$ Karten für irgeneine Zahl $j$ mit $1 \leq j \leq N$ einzeln auf einen neuen Stoß ausgegeben und anschließend mit dem alten Stoß zusammengeblättert. Die neue Anordnung der Karten wird Gilbreath-Anordnung gennant, der Mischvorgang selbst Gilbreath-Permutation.

Wir versuchen nun zwei Fragen zu beantworten: erstens, wie viele verschiedene Arrangements der $N$ Karten gibt's nach einem solchen Mischvorgang; und zweitens, gibt's eine einfache Beschreibung dieser Arrangements?

Um die erste Frage zu beantworten versuche die folgenden Aufgaben zu lösen:

(1) Wie viele Anordnungen von $N$ Karten gibt es insgesamt?
(2) Welche und wie viele Gilbreath-Arrangements gibt's für $N$ Karten für $N = 1, 2, 3, 4$?
(3) Kannst du aus obigen Zahlen eine Vermutung für die Anzahl der Gilbreath-Arrangements für allgemeines $N$ ableiten?
(4) Beweise deine Vermutung!

Bevor wir die zweite Frage beantworten führen wir noch etwas Notation ein: für einen Stoß von $N$, fortlaufend von 1 bis $N$ durchnummerierten, Karten, in der Anordnung $1, 2, 3, \ldots, N$ schreiben wir die neue Anordnung nach einem Mischvorgang $\pi$ in der Form $\pi(1), \pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(N)$ an, wobei $\pi(1)$ die Karte in Position 1, $\pi(2)$ die Karte in Position 2,... , und $\pi(N)$ die Karte in Position $N$ bezeichnet.

Das nächste Theorem, dessen Beweis wir hier nicht geben, beantwortet unsere Frage nach einer einfachen Beschreibung von Gilbreath - Arrangements.

**Theorem 1.** *Für ein Arrangement $\pi$ von $1, 2, 3, \ldots, N$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(1) *$\pi$ ist ein Gilbreath-Arrangement.*
(2) *Für jedes $j$, sind die obersten $j$ Karten $\pi(1), \pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(j)$ verschieden modulo $j$.*
(3) *Für jedes $j$ und $k$ mit $kj \leq N$, sind die Karten $\pi((k-1)j+1), \pi((k-1)j+2), \ldots, \pi(kj)$ verschieden modulo $j$.*
(4) *Für jedes $j$ sind die obersten $j$ Karten aufeinanderfolgend in $1, 2, 3, \ldots, N$.*

Wie hilft uns dieses Theorem obigen Trick zu verstehen?

## 3. Perfect Riffle Shuffles

Im vorherigen Abschnitt haben wir Gilbreath-Arrangements kennen gerlernt bei deren Erzeugung das Zusammenblättern zweier Stöße von Karten eine wichtige Rolle spielte. Dieses Zusammenblättern hat einen eigenen Namen: im Englischen wird das "Riffle Shuffle" genannt, und "Perfect Riffle Shuffle", wenn die Karten aus dem neuen Stoß jeweils abwechselnd aus den beiden alten Stößen gekommen sind. Wir werden im Folgenden versuchen den "Perfect Riffle Shuffle" besser zu verstehen.

Zunächst wieder etwas Notation: angenommen wir haben einen Stoß von $N$ Karten, die wie oben fortlaufend von 1 bis $N$ nummeriert sind. Anders als zuvor bezeichnet nun $\pi(p)$ die Position der Karte $p$ nach einem Mischvorgang $\pi$. Wenn $\pi$ für den "Perfect Riffle Shuffle" steht, dann lässt sich $\pi(p)$ durch eine einfache Formel beschreiben. Diese Formel zu finden ist Inhalt der nächsten Aufgaben.

(1) Beobachte, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt einen "Perfect Riffle Shuffle" auszuführen. Nimm zunächst an, dass die Anzahl $N$ der Karten gerade ist, und mach dir danach Gedanken für den Fall, dass $N$ ungerade ist.
(2) Leite eine Formel für $\pi(p)$ her für die 4 verschiedenen Arten $\pi$ von "Perfect Riffle Shuffles" aus der Aufgabe zuvor. Versuche dazu den Mischvorgang an einem Beispiel zu illustrieren, eine Wertetabelle aufzustellen…

Eine für Menschen, die damit noch nicht vertraut sind, überraschende Tatsache ist, dass Karten in ihre ursprüngliche Anordnung gebracht werden können, wenn sie nur oft genug durch ein und denselben "Perfect Riffle Shuffle" gemischt werden. Für einen Stoß von 52 Karten und dem "Perfect Riffle Shuffle" bei dem die äußersten Karten ihre Position nicht ändern, ist diese Anzahl 8. Das heißt: 8 mal hintereinander Mischen und die Anordnung der Karten ist wieder in ihrem ursprünglichen Zustand. Der Inhalt der nächsten Aufgabe ist es, dies zu zeigen.

(1) Zeige, dass 8-maliges ausführen eines "Perfect Riffle Shuffle" bei dem die äußersten Karten fixiert bleiben, die Anordnung der 52 Karten unverändert lässt.

## References

Persi Diaconis und Ron Graham, *Magical Mathematics, The Mathematical Ideas That Animate Great Magic Tricks*
S. Brent Morris, Magic Tricks, Card Shuffling And Dynamic Computer Memories