DARSTELLUNG VON KURVEN

Lisa Groiss
Jänner, 2020

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITY LINZ

Institute of Applied Geometry
JKU Linz

Funktionen

Parametrisierte Kurve

Bézierkurven

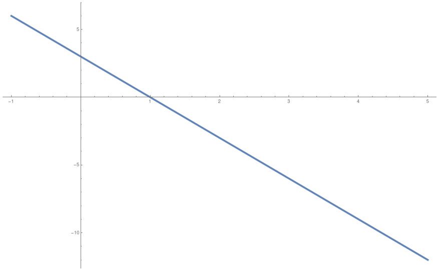
- Ableitung einer Bézierkurve
- Algorithmus von De Casteljau

Beispiele

FUNKTIONEN

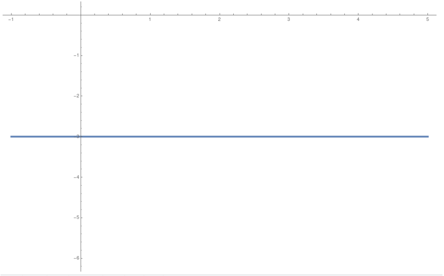
Lineare Funktion

$$f(x) = kx + d$$



Ableitung

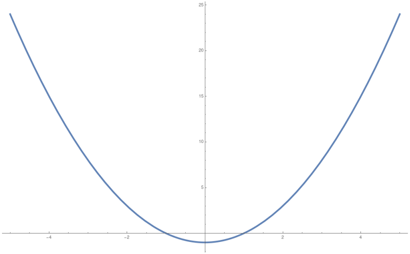
$$f'(x) = k$$



Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Eine quadratische Funktion hat die Steigung $f'(x) = 2ax + b$.



Polynomfunktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Polynome können ebenfalls abgeleitet werden:

- *Aufgabe*: $f(x) = 3x^2 - 3x + 7, \quad f'(x) = \ldots$
- *Aufgabe*: $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 2x + 16, \quad f'(x) = \ldots$
- *Aufgabe*: $f(x) = (1 - x)^3 + 4x^2 - x, \quad f'(x) = \ldots$
- *Aufgabe*: Wie sieht die Ableitung einer allgemeinen Polynomfunktion aus?

Darstellung von Funktionen

- Explizite Darstellung

$$y = f(x)$$

- Implizite Darstellung

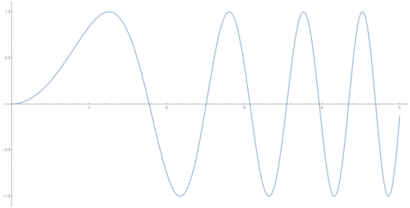
$$F(x, y) = 0$$

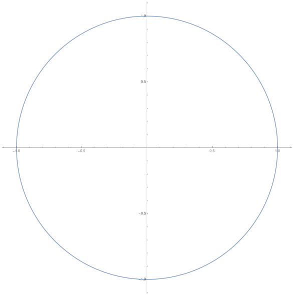
- Parameterdarstellung

$$\mathbf{C}(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 1]$$

Darstellung von Funktionen

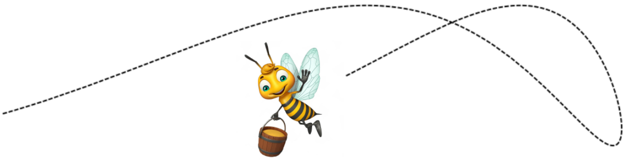
- *Aufgabe*: Welche Vor- und Nachteile haben die unterschiedlichen Darstellungen?
- *Aufgabe*: Welche Beispiele für die Darstellungen sind bekannt!





Was möchten wir mit Kurve machen?

- **Modellierung** – Wie schaut die Kurve aus?
- **Berechnung** – Liegt ein Punkt auf Kurve?
- Zeitlicher **Verlauf** – Wo befindet sich meine Biene gerade?
- **Schnittmenge** – Schneiden sich zwei Kurven? Wenn ja, wo?
- **CAD Systeme** – Rotation, Translation, Skalieren



PARAMETRISIERTE KURVE

Kurve

Eine Kurve ist eine Vektorfunktion

$$\begin{aligned} \mathbf{x}: \quad & I \to \mathbb{R}^3 \\ & t \mapsto \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kurve entsteht als **Bahn eines bewegten Punktes**

- *Aufgabe* Wie kann eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Kurve dargestellt werden?
- *Aufgabe*: Ist jede Kurve als Funktion darstellbar? Warum ja/nein?

Warum parametrisierte Kurven

- Punkte einfach berechenbar
- drehen, verschieben, skalieren durch Matrix-Multiplikation
- Zeitlicher Verlauf kann dargestellt werden

Nachteil: Konstruktion

Honiglieferant:
Biene soll Kunden mit Honig beliefern und wir möchten Kurve angeben.
Wie sieht die einfachste Kurve aus?

Erster Gedanke

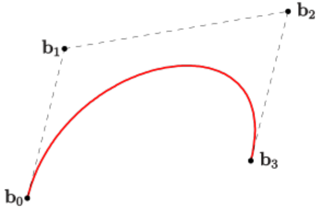
Verwendung polynomialer Kurven

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_n \cdot t^n \\ b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \cdots + a_n \cdot t^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t^2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} t^n$$

- Kurvenverlauf nicht ablesbar
- effiziente Darstellung wünschenswert

BÉZIERKURVEN

Was sind Bézierkurven?



- **Freiformkurven** definiert durch **Kontrollpunkte** und **Basisfunktionen**
- glatte Kurven
- **Bernstein Polynome** anstatt Monombasis $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$

Bernstein Polynome

$$\mathbf{B}_i^n(u) = \binom{n}{i} (1-u)^{n-i} \, u^i$$

- Nicht-negativ: $\mathbf{B}_i^n(u) \geq 0$ für $0 \leq u \leq 1$
- Zerlegung der Eins: $\sum_{i=0}^n \mathbf{B}_i^n(u) = 1$
- $\mathbf{B}_0^n(0) = \mathbf{B}_n^n(1) = 1$
- Rekursive Definition:

$$\mathbf{B}_i^n(u) = (1-u)\,\mathbf{B}_i^{n-1}(u) + u\,\mathbf{B}_{i-1}^{n-1}(u)$$

$$\mathbf{B}_i^n(u) = 0 \quad \text{falls } i < 0 \text{ oder } i > n$$

$$\mathbf{B}_0^0(u) = 1$$

Bernstein Polynome

- *Aufgabe* Berechnen Sie die Bernstein Polynome vom Grad $n = 2$ mit Hilfe der rekursiven Definition!

$$\mathbf{B}_i^n(u) = (1-u)\,\mathbf{B}_i^{n-1}(u) + u\,\mathbf{B}_{i-1}^{n-1}(u)$$

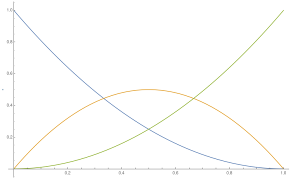
$$\mathbf{B}_i^n(u) = 0 \quad \text{falls } i < 0 \text{ oder } i > n$$

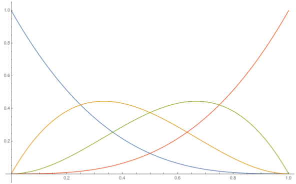
$$\mathbf{B}_0^0(u) = 1$$

Bernstein Polynome

Bernstein Polynome vom Grad $n = 2$ und $n = 3$

$$
\begin{aligned}
B_0^2 &= (1-t)^2, \\
B_1^2 &= 2t(1-t), \\
B_2^2 &= t^2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
B_0^3 &= (1-t)^3, \\
B_1^3 &= 3t(1-t)^2, \\
B_2^3 &= 3t^2(1-t), \\
B_2^3 &= t^3
\end{aligned}
$$





BÉZIERKURVEN

ABLEITUNG EINER BÉZIERKURVE

Ableitung einer Bézierkurve

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{B}_i^n(t)\,\mathbf{P}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{C}(t) = n\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}_i^{n-1}(t)(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$$

- *Aufgabe* Beweis dieser Formel

Ableitung einer Bézierkurve

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{C}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{B}_i^n(t)\,\mathbf{P}_i\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\, t^i\,(1-t)^{n-i}\,\mathbf{P}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\, i\, t^{i-1}\,(1-t)^{n-i}\,\mathbf{P}_i \\
&\qquad - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i}\,(n-i)\, t^i\,(1-t)^{n-i-1}\,\mathbf{P}_i
\end{aligned}
$$

Ableitung einer Bézierkurve

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (i+1)\, t^i\, (1-t)^{n-i-1}\, \mathbf{P}_{i+1} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (n-i)\, t^i\, (1-t)^{n-i-1}\, \mathbf{P}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (i+1)\, t^i\, (1-t)^{n-i-1}\, \mathbf{P}_{i+1} \\
&\quad - \binom{n}{i} (n-i)\, t^i\, (1-t)^{n-i-1}\, \mathbf{P}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} n \binom{n}{i}\, t^i\, (1-t)^{n-i-1} (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i) = n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}_i^{n-1} (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)
\end{aligned}
$$

Ableitung einer Bézierkurve

- *Aufgabe* Die Kontrollpunkte $\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die zugehörigen Tangentenvektoren $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind gegeben. Gesucht ist eine Bézierkurve $\mathbf{C}(t)$, sodass $\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_3$ und $\mathbf{C}'(0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{C}'(1) = \mathbf{v}_1$.

Ableitung einer Bézierkurve

Der Grad der Bézierkurve ist 3.

$$\mathbf{C}'(0) = n\,(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad \mathbf{C}'(1) = n\,(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\,(\mathbf{P}_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\,(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \mathbf{P}_2)$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -4 \end{pmatrix}$$

BÉZIERKURVEN

ALGORITHMUS VON DE CASTELJAU

Algorithmus von De Casteljau

- Corner-cutting Algorithmus
- **Effiziente** Berechnung beliebig genauer **Näherung** einer Bézierkurve

Wir definieren $\mathbf{P}_{0,i} := \mathbf{P}_i$ und suchen $\mathbf{C}(u_0) = \mathbf{P}_{n,0}(u_0)$

$$\mathbf{P}_{k,i}(u_0) = (1 - u_0)\,\mathbf{P}_{k-1,i}(u_0) + u_0\,\mathbf{P}_{k-1,i+1}(u_0)$$

$$\text{für} \begin{cases} k & = 1, \ldots, n \\ i & = 0, \ldots, n-k \end{cases}$$

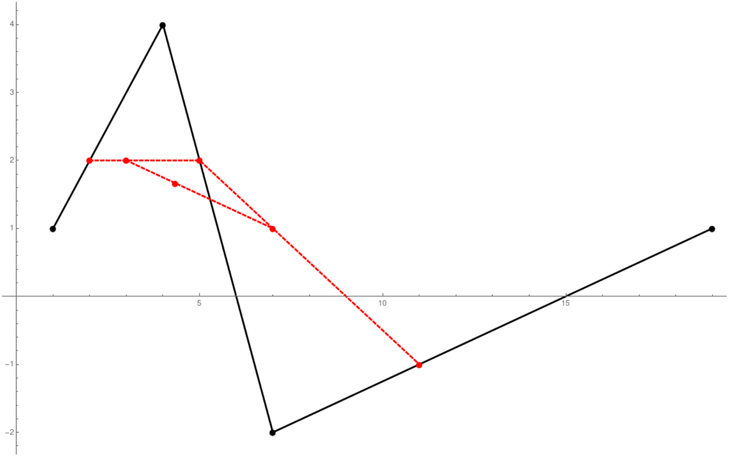
Algorithmus von De Casteljau

- *Aufgabe* Die folgenden Kontrollpunkte einer Bézierkurve sind gegeben:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\mathbf{C}\left(\frac{1}{3}\right)$ mit dem Algorithmus von De Casteljau.

Algorithmus von De Casteljau



Algorithmus von De Casteljau

$$\mathbf{P}_{1,0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{1,2} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{2,0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{2,1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{3,0} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Vorteile von Bezierkurven

Mathematisch sind *beide Darstellungen äquivalent*.

Bzgl. “**geometric modeling**” sehr vorteilhaft:

- Kurve liegt immer innerhalb des Kontrollpolygon
- glatte Kurve
- Tangente im Anfangs- und Endpunkt sofort ablesbar
- Kurve kann mittels De Casteljau Algorithmus durch einfache Berechnungen angenähert werden

Nachteile von Bézierkurven

- Darstellung von z.B. Kreisen nicht möglich

  Rationale Bézierkurven

- Kontrollpunkte haben globalen Einfluss auf die Kurve

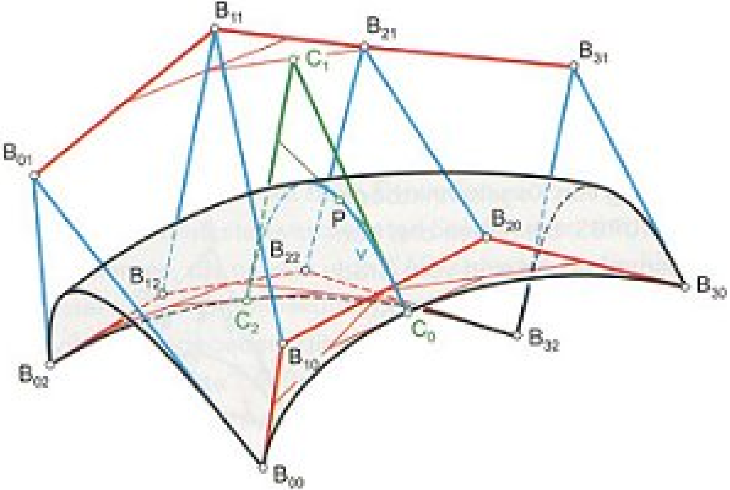
  Splines

Bézierflächen

Für Bézierflächen werden zwei Parameter benötigt:

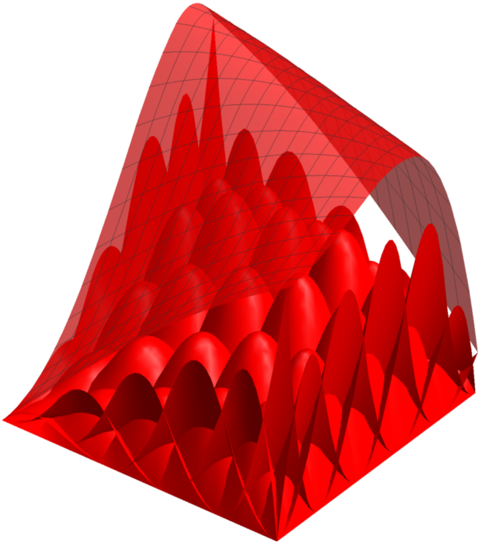
$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{B}_i^n(u)\mathbf{B}_j^m(v)\mathbf{P}_{i,j}$$

- Netz von Kontrollpunkten $\mathbf{P}_{i,j}$
- Basisfunktionen für jede Richtung

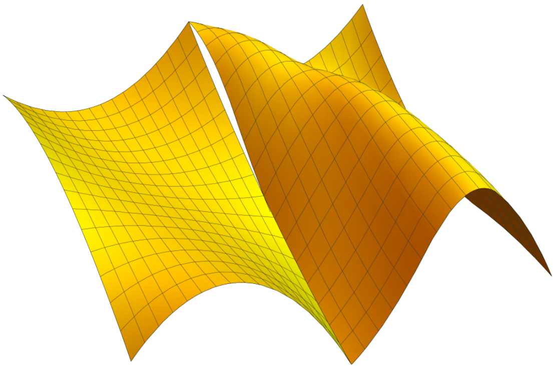

B11
B21
C1
B31
B01
P
B20
B22
v
B12
B30
C2
C0
B32
B10
B02
B00

BEISPIELE

Basisfunktionen



Interfaces



Interpolationspunkte